Б.Г. Зив

# ГЕОМЕТРИЯ

## ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## 9 КЛАСС

11-е издание

Москва
"Просвещение"
2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
З-59

**Зив Б. Г.**

З-59 Геометрия. Дидактические материалы. 9 класс / Б. Г. Зив. — 11-е изд. — М.: Просвещение, 2009. — 127 с.: ил. — ISBN 978-5-09-021622-7.

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы, математические диктанты и проверочные работы. Дидактические материалы адресованы учителям, работающим по учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной, но могут быть использованы при работе по другим учебникам.

**УДК 372.8:514**
**ББК 74.262.21**

**ISBN 978-5-09-021622-7**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии представлены 20 самостоятельных работ, 4 работы на повторение, 5 математических диктантов и 6 контрольных работ и набор задач повышенной сложности. Самостоятельные работы обозначены буквой **С** с соответствующим номером, работы на повторение — буквой **П**, математические диктанты — **МД**, а контрольные работы — буквой **К**.

Основная цель предлагаемых самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут использоваться для текущего контроля умений и навыков.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах.

В первом и втором вариантах каждой работы предлагаются задачи, для успешного решения которых учащиеся должны применять знания на уровне минимальных программных требований. Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Решение этих задач предусматривает умение распознавать понятия в стандартных ситуациях, применять знания в стандартных условиях или при небольших отклонениях от них. Задачи третьего и четвертого вариантов по сложности примерно соответствуют большинству основных задач учебника. Пятый и шестой варианты предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов требуется уметь применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать сложные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. Задачи из седьмого и восьмого вариантов могут быть даны учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использованы в качестве необязательного задания для домашней работы, а также на факультативных занятиях или занятиях математического кружка. Учителю не следует стремиться обязательно выполнять с учащимися все задания каждой из работ. Предполагается, что представленный в пособии набор работ позволит учителю на любом уроке отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Работы скомпонованы в пособии по вариантам. Наличие восьми вариантов позволяет учителю один экземпляр книги разделить на восемь маленьких книг, каждая из которых дается отдельному ученику.

Работы на повторение составлены в шести вариантах примерно одинаковой степени сложности. Они позволяют учителю комплексно повторить основные темы 7—9-х классов. Каждая работа состоит из нескольких небольших задач или вопросов различной степени сложности. Это дает возможность каждому ученику проверить свои силы по отдельным вопросам курса геометрии и лучше подготовиться к выпускному экзамену.

Математические диктанты предназначаются для систематизации теоретических знаний учащихся и могут предшествовать контрольной работе. Диктант представляет собой набор небольших задач по прямому применению теории. При проведении диктанта учитель предлагает вопрос или задачу, а ученик должен в течение нескольких минут дать на них ответ. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу можно отвести 30—35 мин, после чего учитель вместе с классом проверяет ответы учащихся, анализирует допущенные ошибки. Учитель сам решит, какие задачи дать текстом, а какие с использованием чертежа. Учитель также по своему усмотрению может предлагать не все вопросы диктанта, а только их часть. Задания математических диктантов могут быть использованы как набор дополнительных вопросов на экзамене по геометрии.

Контрольные работы составлены в четырех вариантах. Они предназначены для проведения итоговой проверки знаний по каждой из четырех глав учебника и по всему курсу геометрии. Сложность всех вариантов работ примерно одинакова. В каждом варианте имеется задание, отмеченное знаком *. Это задание потребует творческого применения знаний, анализа нестандартных геометрических конфигураций, проведения достаточно сложных дедуктивных рассуждений. Оценки выставляются ученикам только за основную часть работы, а ученики, решившие дополнительную задачу, могут получить вторую оценку за работу.

Задачи повышенной сложности составлены по материалам математических олимпиад, проведенных в Санкт-Петербурге. Так как в 9-м классе заканчивается курс планиметрии, то олимпиадные задачи составлялись по всему курсу геометрии и их содержание не обязательно привязывалось только к курсу 9-го класса.

В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным работам, работам на повторение и к контрольным работам. К наиболее сложным заданиям даны указания или приведены решения. Предложенные решения, разумеется, не являются единственно возможными.

# САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## ВАРИАНТ 1

### С—1

1. На рисунке 1 $ABCD$ — трапеция, у которой $AB = CD = 4$, $BC = 2$, $AD = 5$. Найдите, если это возможно, такое число $k$, что:

   1) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

2. В треугольнике $ABC$ точка $M$ — середина стороны $BC$, а $E$ — середина отрезка $AM$. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

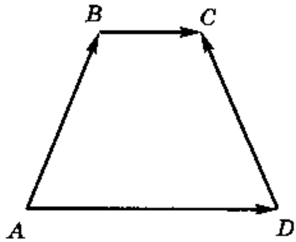


Рис. 1

### С—2

1. Запишите координаты векторов:

   1) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$; 2) $\vec{b} = -3\vec{j}$.

2. На рисунке 2 $OABC$ — квадрат, $OB = 2\sqrt{2}$. Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

3. Даны два вектора $\vec{a}\{-2;\ 3\}$ и $\vec{b}\{1;\ 1\}$:

   1) найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$;

   2) будут ли векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}\{-2;\ 8\}$ коллинеарными?

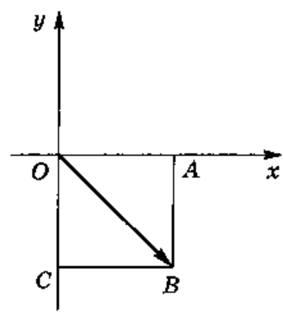


Рис. 2

### С—3

1. Точка $A$ лежит на положительной полуоси $Oy$, а точка $C$ — на положительной полуоси $Ox$.

   1) Найдите координаты вершин трапеции $OABC$, если $OA = AB = 3$, $OC = 5$.

   2) Каковы координаты середин диагоналей трапеции?

   3) Чему равно расстояние между этими серединами?

2. $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j}$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$.

## С—4

В треугольнике $ABC$ проведена высота $BH$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины $A$, если $\angle ABH = 45°$, $BH = 6$, $HC = 8$.

## С—5

1. Окружность задана уравнением $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 20$.
   1) Найдите координаты центра этой окружности и ее радиус.
   2) Проходит ли эта окружность через начало координат?
2. На рисунке 3 окружность касается осей координат, $OO_1 = 2\sqrt{2}$. Напишите уравнение этой окружности.

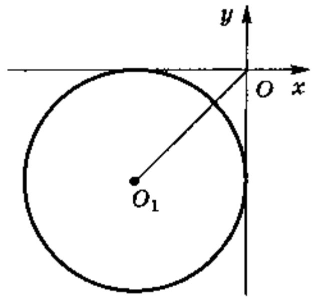

Рис. 3

## С—6

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(9; 3)$ и перпендикулярную оси $Ox$.
2. Треугольник задан координатами своих вершин: $A(2; -6)$, $B(4; 2)$ и $C(0; -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, которая параллельна стороне $AC$.

## С—7

1. Выясните взаимное расположение прямой $x = 19$ и окружности $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 81$.
2. Найдите множество точек, удаленных от окружности $x^2 + y^2 = 16$ на расстояние, равное 3.

## С—8

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 2 см, а угол при основании 15°.
2. Найдите сторону ромба, если его площадь равна $8\sqrt{2}$ см$^2$, а угол равен 45°.

## С—9

1. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 45°$, $\angle C = 15°$, $BC = 4\sqrt{6}$. Найдите $AC$.
2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) $\angle A = \alpha$, $AC = b$, $AE$ — биссектриса. Найдите $AE$.

## С—10

1. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в 120°, если две другие стороны равны 6 см и 10 см.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 3, 5, 7?

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $b = 0{,}3$, $\angle A = 32°$, $\angle B = 70°$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике $ABC$ $a = 28$, $b = 35$, $c = 42$. Найдите угол, лежащий против меньшей стороны.

## С—12

1. В квадрате $ABCD$ сторона равна 1. Диагонали пересекаются в точке $O$. Найдите скалярные произведения:
   1) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$; 2) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$.
2. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $3\vec{b}$, если $\vec{a}\,\{-1;\ 3\}$, $\vec{b}\,\{2;\ 1\}$.

## С—13

1. $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 135°$. Найдите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.
2. $ABCD$ — квадрат, $F$ — середина $CD$, а $E$ — середина $AD$. Используя векторы, докажите, что $BE \perp AF$.

## С—14

1. Найдите углы правильного двадцатиугольника.
2. Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $a$. Найдите сторону шестиугольника и его большую диагональ.

## С—15

1. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\sqrt{3}$ см. Найдите периметр и площадь треугольника.
2. Хорда окружности, равная $a$, стягивает дугу в 90°. Найдите радиус окружности.
3. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный четырехугольник.

## С—16

1. Длина окружности, описанной около квадрата, равна $8\pi$ см. Найдите периметр квадрата.
2. С помощью микрокалькулятора найдите длину дуги, содержащей 105° и радиус которой равен 22 дм.

## С—17

1. Площадь круга больше площади правильного вписанного в него шестиугольника на $4\pi - 6\sqrt{3}$. Найдите радиус круга.
2. С помощью микрокалькулятора найдите площадь сектора, дуга которого содержит 115° и радиус которого равен 12,7 см.
3. Постройте круг, площадь которого в 9 раз больше площади данного круга.

## С—18

1. На рисунке 4 изображен угол $ABC$. Постройте угол, симметричный данному относительно оси $l$.
2. Докажите, что при движении вертикальные углы отображаются на вертикальные углы.

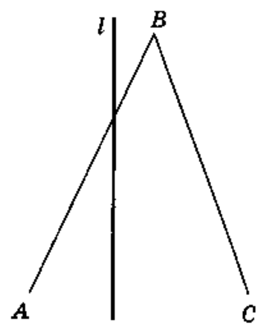


Рис. 4

## С—19

1. Постройте образ угла $MOH$ (рис. 5) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

2. Используя параллельный перенос, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и вторая прямая перпендикулярна этой прямой.

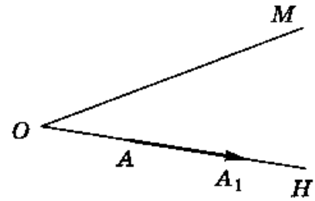


Рис. 5

## С—20

1. Постройте образ $A_1B_1$ хорды $AB$ при ее повороте вокруг центра окружности на 45° против часовой стрелки. Сравните длины $AB$ и $A_1B_1$.

2. Докажите, что при вращении правильного шестиугольника вокруг его центра на 120° он отображается сам на себя.

## ВАРИАНТ 2

### С—1

1. На рисунке 6 $ABCD$ — трапеция, у которой $AC = BD = 15$, $BC = 7$, $AD = 20$. Найдите, если это возможно, такое число $m$, что: 1) $\overrightarrow{DA} = m\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{DB}$.

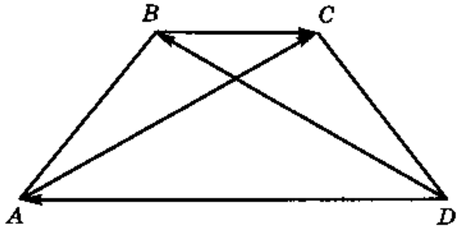


Рис. 6

2. В треугольнике $EMK$ точка $P$ — середина стороны $EK$, а $T$ — середина $MK$. Разложите вектор $\overrightarrow{MP}$ по векторам $\overrightarrow{ME} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{MT} = \vec{n}$.

### С—2

1. Запишите координаты векторов:
   1) $\vec{m} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$; 2) $\vec{p} = -4\vec{i}$.
2. На рисунке 7 $OPTE$ — квадрат, $OT = 5\sqrt{2}$. Разложите вектор $\overrightarrow{OT}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Даны два вектора $\vec{p}\,\{-3;\ 4\}$ и $\vec{l}\,\{1;\ 2\}$.
   1) Найдите координаты вектора $\vec{p} - \vec{l}$.
   2) Будут ли векторы $\vec{p} - \vec{l}$ и $\vec{k}\,\{4;\ -2\}$ коллинеарными?

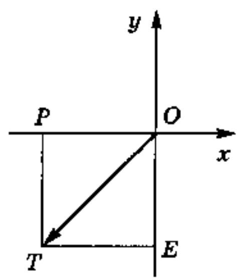


Рис. 7

### С—3

1. Точка $A$ лежит на положительной полуоси $Oy$, а точка $C$ — на отрицательной полуоси $Ox$.
   1) Найдите координаты вершин трапеции $OABC$, если $OA = 4$, $OC = 2$, $AB = 8$.
   2) Каковы координаты середин диагоналей трапеции?
   3) Чему равно расстояние между этими серединами?
2. $\vec{m} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{n} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Найдите $|\vec{m} - \vec{n}|$.

## С—4

В треугольнике $MKP$ с углом $M$, равным 45°, высота $KH$ делит сторону $MP$ на отрезки, длины которых 4 и 6, считая от вершины $M$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины $M$.

## С—5

1. Окружность задана уравнением $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 40$.
   1) Найдите координаты центра этой окружности и ее радиус.
   2) Пересекает ли эта окружность ось $Ox$ в точке (5; 0)?
2. На рисунке 8 окружность касается осей координат, $OO_1 = 3\sqrt{2}$. Напишите уравнение этой окружности.

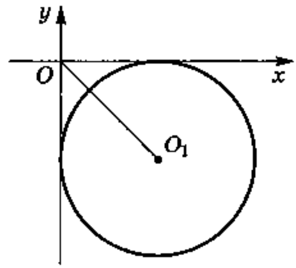


Рис. 8

## С—6

1. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $B(-3;\ 10)$ и перпендикулярную оси $Oy$.
2. В треугольнике $ABC$ $PK$ — средняя линия треугольника, параллельная $AB$, $P$ (2; 3), $K$ (–1, 2) и $C$ (0; 0). Напишите уравнение прямой, содержащей сторону $AB$.

## С—7

1. Выясните взаимное расположение прямой $y = 20$ и окружности $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 100$.
2. Даны две точки $A$ (2; 0) и $B$ (6; 0). Найдите множество всех таких точек $M$, для которых $MA = MB$.

## С—8

1. В треугольнике $ABC$ $\angle ABC = 120°$, $AB = 6$. Площадь треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите $BC$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $BC = 3\sqrt{3}$ см, $\angle BAD = 30°$, $BD = BC$. Найдите площадь параллелограмма.

## С—9

1. В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$) $CD$ — биссектриса, $\angle A = 15°$, $AC = \sqrt{3}$. Найдите $AD$.
2. В остроугольном треугольнике $ABC$ $BD \perp AC$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $BD = h$. Найдите $AC$.

## С—10

1. Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в $135°$, если две другие стороны равны $2\sqrt{2}$ см и 3 см.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны 4, 5, 6?

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $b = 18$; $c = 12$; $\angle A = 50°$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике $EKP$ $EP = 0{,}75$, $\angle P = 40°$, $\angle K = 25°$. Найдите $PK$.

## С—12

1. Сторона равностороннего треугольника $ABC$ равна 1, $MN$ — средняя линия ($MN \parallel AC$). Найдите скалярные произведения:

   1) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
2. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{n}$, если $\vec{m}\,\{3; -1\}$, $\vec{n}\,\{2; 4\}$.

## С—13

1. $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 150°$. Найдите $|2\vec{a} - \vec{b}|$.
2. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = \frac{1}{2}AB$, $E \in CD$, причем $DE = \frac{1}{4}DC$. Используя векторы, докажите, что $BD \perp AE$.

## С—14

1. Угол правильного многоугольника равен $144°$. Найдите число его сторон.
2. Сторона правильного шестиугольника равна $b$. Найдите его диагонали.

## С—15

1. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен $2\sqrt{3}$ см. Найдите периметр и площадь шестиугольника.
2. Хорда окружности, равная $m$, стягивает дугу в 120°. Найдите радиус окружности.
3. С помощью циркуля и линейки впишите в данную окружность правильный треугольник.

## С—16

1. Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна $12\pi$ см. Найдите периметр треугольника.
2. С помощью микрокалькулятора найдите радиус дуги окружности, если дуга содержит 138° и ее длина равна 15 см.

## С—17

1. Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $27\sqrt{3} - 9\pi$. Найдите радиус круга.
2. Радиус сектора равен 9,7 см, а его площадь — 162 см$^2$. Сколько градусов содержит дуга сектора? Вычислите с помощью микрокалькулятора.
3. Постройте круг, площадь которого в 4 раза меньше площади данного круга.

## С—18

1. На рисунке 9 изображен угол $ABC$. Постройте угол, симметричный данному относительно центра $O$.
2. Докажите, что при движении смежные углы отображаются на смежные.

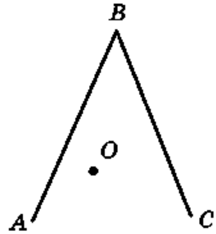


Рис. 9

## С—19

1. Постройте образ угла $EOF$ (рис. 10) при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

2. Используя параллельный перенос, докажите, что углы при основании равнобедренной трапеции равны между собой.

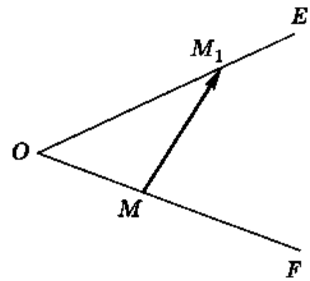


Рис. 10

## С—20

1. Точки $A$ и $B$ принадлежат окружности с центром $O$. Постройте образ $A_1OB_1$ сектора $AOB$ при вращении вокруг центра $O$ на 60° по часовой стрелке. Сравните дуги $AB$ и $A_1B_1$.

2. Докажите, что при вращении квадрата вокруг его центра на 180° он отображается сам на себя.

## ВАРИАНТ 3

### С—1

1. В трапеции $ABCD$ $AD$ и $BC$ — основания, $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$, причем $AO : OC = 3 : 1$. Найдите, если возможно, такое число $k$, что:

   1) $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CO} = k\overrightarrow{AO}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $M \in CD$, причем $CM : MD = 3 : 2$. Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$.

### С—2

1. Докажите, что лучи, задающие векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, взаимно перпендикулярны.

2. На рисунке 11 $OA = OB = 5$, $OM = 3$ $(AB \parallel Ox)$. Разложите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

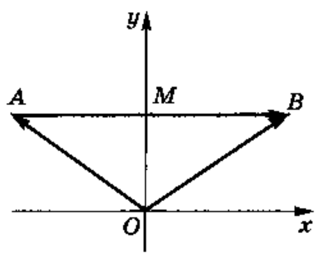


Рис. 11

3. Даны два вектора $\vec{a}\,\{-2;\ 4\}$ и $\vec{b}\,\{1;\ 3\}$.

   1) Найдите координаты вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

   2) Сонаправлены или противоположно направлены векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}\,\{-14;\ -2\}$?

### С—3

1. На рисунке 12 $OA = 5$, $OB = 4\sqrt{2}$. Луч $OB$ составляет с положительным направлением оси $Ox$ угол в 45°. Точка $A$ удалена от оси $Ox$ на расстояние, равное 3.

   1) Найдите координаты точек $A$ и $B$.

   2) Найдите длину отрезка $AB$.

   3) Найдите длину медианы треугольника $AOB$, проведенной из вершины $O$.

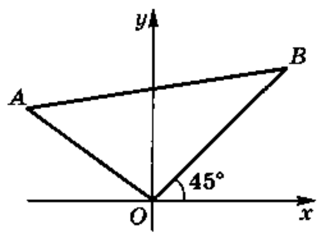


Рис. 12

2. Даны точки $A\,(-1;\ 3)$ и $B\,(1;\ 1)$. На оси $Ox$ найдите точку, удаленную от точки $A$ на расстояние, в два раза большее, чем до точки $B$.

## С—4

В треугольнике $ABC$ $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60°$. Найдите медиану, проведенную из вершины $A$.

## С—5

1. Окружность задана уравнением $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Докажите, что отрезок $AB$, где $A\,(-1;\ 6)$ и $B\,(-1;\ -2)$, является диаметром этой окружности.
2. На рисунке 13 окружность касается оси $Ox$ в точке $F$, а луча $OM$ — в точке $E$; $\angle FO_1E = 120°$, $OO_1 = 2\sqrt{3}$. Напишите уравнение этой окружности.

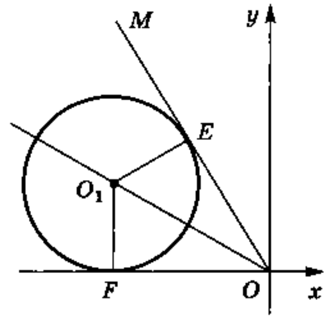

Рис. 13

## С—6

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A\,(2;\ 2)$, $B\,(4;\ 8)$ и $C\,(-6;\ 10)$. Напишите уравнение прямой $AD$.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченную прямыми $y + x = 0$, $y - x + 6 = 0$ и осью $Ox$.

## С—7

1. Выясните взаимное расположение прямой $x + y - 3 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$.
2. Даны точки $A\,(0;\ 0)$ и $B\,(0;\ 2)$. Найдите множество таких точек $M$, что $MB = 2MA$.

## С—8

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 3$, $BC = 4$, $BD$ — биссектриса, $\angle ABD = \alpha$. Найдите площадь треугольника $ABD$.
2. Найдите площадь параллелограмма, если его диагонали равны 10 см и 8 см и угол между ними равен 60°.

## С—9

1. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC$ разбивает угол $A$ на два угла $\alpha$ и $\beta$; $AC = d$. Найдите площадь параллелограмма.

2. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 10°$, $\angle C = 20°$, $AC = 10$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

## С—10

1. В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол при вершине $B$ равен $120°$, $AC = 2\sqrt{21}$. Найдите длину медианы $AM$.

2. Стороны треугольника равны 5, 7 и 8. Найдите угол, лежащий против средней по величине стороны.

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 25°30'$, $b = 10{,}8$, $BE \perp AC$, $BE = 7{,}6$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 52°$, $\angle B = 70°$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 7. Найдите площадь треугольника.

## С—12

1. В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) $BD$ — медиана, $E \in BD$, $AC = 8$, $BD = 3$. Найдите скалярные произведения:

   1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA}$.

2. Прямая задана двумя точками $A(4; -7)$ и $B(-2; 3)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямой $AB$ и положительным направлением оси $Ox$.

## С—13

1. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$ и $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°$.

2. В треугольнике $ABC$ $AB=2$, $AC=3\sqrt{2}$, $\angle BAC=45°$. Найдите длину медианы $AD$.

## С—14

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность, радиус которой равен $R$. Стороны многоугольника удалены от его центра на расстояние, равное $\frac{R}{2}$. Чему равно число сторон этого многоугольника?

2. Докажите, что в правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $AC$ и $AD$ делят угол $BAE$ на три равные части.

## С—15

1. В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Площадь квадрата равна $Q$. Найдите сторону и площадь треугольника.

2. В окружность вписан правильный шестиугольник, и вокруг окружности описан правильный шестиугольник. Найдите отношение их площадей.

3. С помощью циркуля и линейки опишите около окружности правильный четырехугольник.

## С—16

1. Найдите периметр заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 14, если радиус окружности с центром $O$ равен $R$, а $\smile AMB = 120°$.

2. Окружность радиуса 12 см разогнута в дугу, центральный угол которой равен 135°. Найдите радиус дуги.

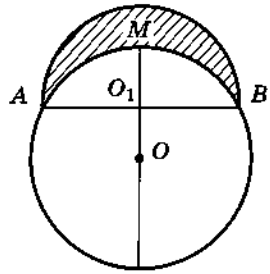


Рис. 14

## С—17

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 15.

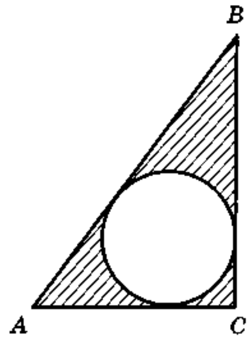


Рис. 15

2. Дуга $AB$ содержит 120°, а радиус равен $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 16.

3. Постройте круг, площадь которого равна разности площадей двух данных кругов.

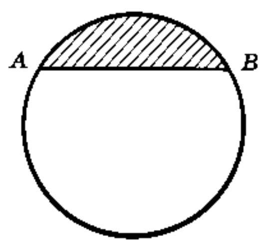


Рис. 16

## С—18

1. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису одного из его внешних углов.

2. Докажите, что при движении подобные ромбы отображаются на подобные ромбы.

## С—19

1. В произвольном треугольнике $ABC$ $BD$ — медиана. Точки $E$ и $F$ принадлежат медиане $BD$ ($B$—$F$—$E$). Постройте образ треугольника $ABC$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{FE}$.

2. Даны две равные окружности с центрами в точках $O$ и $O_1$, $OO_1 = 15$ см. Прямая $l$, параллельная прямой $OO_1$, пересекает эти окружности в точках $A$, $B$, $C$ и $D$ ($A$—$B$—$C$—$D$). Найдите длину отрезка $AC$.

## С—20

1. Постройте образ угла $ABC$ (рис. 17), полученный поворотом вокруг центра $O$ на 60° по часовой стрелке.

2. Хорды одной и той же окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности. Докажите, что они равны.

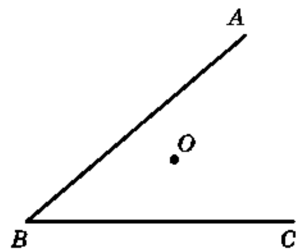


Рис. 17

## ВАРИАНТ 4

### С—1

1. В треугольнике $ABC$ медианы $BE$ и $CK$ пересекаются в точке $O$. Через точку $O$ проведена прямая, параллельная $AC$ и пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $P$ и $T$. Найдите, если возможно, такое число $k$, что: 1) $\overrightarrow{TP} = k\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{OE}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $K \in AB$, причем $AK : KB = 4 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{KB}$ по векторам $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$.

### С—2

1. Докажите, что лучи, задающие векторы $\vec{m} = -\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$, взаимно перпендикулярны.

2. На рисунке 18 $OM = OP = 17$, $OK = 8$ $(MP \parallel Oy)$. Разложите векторы $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

3. Даны два вектора $\vec{l}\,\{3;\ -2\}$ и $\vec{p}\,\{-4;\ 1\}$.
   1) Найдите координаты вектора $\vec{a} = 3\vec{l} - 2\vec{p}$.
   2) Сонаправлены или противоположно направлены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}\,\{-34;\ 16\}$?

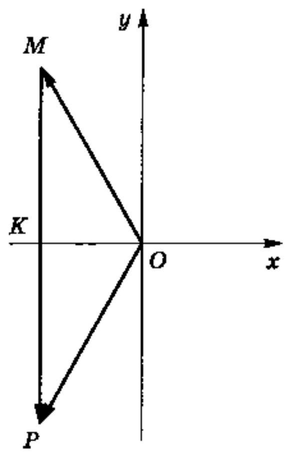

Рис. 18

## С—3

1. На рисунке 19 $OA = 8\sqrt{2}$, $OB = 10$. Луч $OA$ составляет с отрицательным направлением оси $Ox$ угол в 45°, а точка $B$ удалена от оси $Oy$ на расстояние, равное 8.

   1) Найдите координаты точек $A$ и $B$.

   2) Найдите длину отрезка $AB$.

   3) Найдите длину медианы треугольника $AOB$, проведенную из вершины $O$.

2. Даны точки $M(3;\ -1)$ и $P(-8;\ 2)$. На оси $Oy$ найдите точку, удаленную от точки $M$ на расстояние, в два раза меньшее, чем до точки $P$.

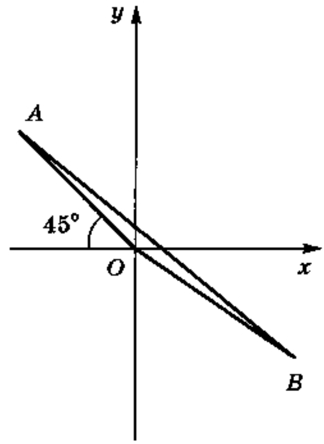


Рис. 19

## С—4

В треугольнике $KHP$ $KH = 8\sqrt{2}$, $KP = 18$, $\angle K = 45°$. Найдите медиану, проведенную из вершины $K$.

## С—5

1. Окружность задана уравнением $(x+3)^2 + y^2 = 9$. Является ли отрезок $MH$, где $M(-1;\ \sqrt{5})$ и $H(-5;\ -\sqrt{5})$, диаметром этой окружности?

2. На рисунке 20 окружность касается оси $Oy$ в точке $K$, а луча $OE$ — в точке $P$, $\angle KOP = 60°$, $KP = 2\sqrt{3}$. Напишите уравнение этой окружности.

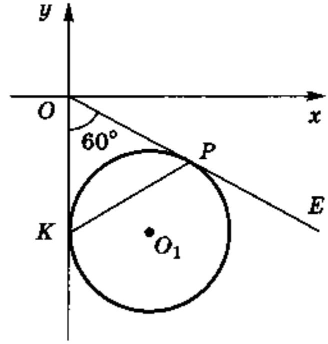


Рис. 20

## С—6

1. Даны три последовательных вершины параллелограмма $MPKT$: $M(-1;\ 2)$, $P(3;\ 1)$ и $K(1;\ -2)$. Напишите уравнение прямой $PT$.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x - 4 = 0$, $y + x = 0$ и осью ординат.

## С—7

1. Выясните взаимное расположение прямой $y - x - 4 = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 8$.
2. Даны точки $A(-1;\ 2)$ и $B(2;\ -2)$. Найдите множество точек $M$, таких, что $MA = MB$.

## С—8

1. В треугольнике $ABC$ $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = \alpha$, $AA_1$ и $BB_1$ — медианы треугольника. Они пересекаются в точке $O$. Найдите площадь треугольника $AOB_1$.
2. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 10 см, а угол между ними — 45°. Найдите площадь параллелограмма.

## С—9

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания), $\angle BCA = \beta$, $\angle CDA = \alpha$, $AD = m$. Найдите площадь трапеции.
2. Треугольник $ABC$ вписан в окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 40°$. Найдите $AC$.

## С—10

1. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 2$, $\angle BAD = 60°$, $BE \perp AD$, $BE = 2\sqrt{3}$. Найдите длину большей диагонали параллелограмма.
2. Стороны треугольника равны 3, 5 и 7. Найдите наибольший угол треугольника.

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $a = 3{,}9$, $b = 4{,}1$, $c = 2{,}8$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике $ABC$ $a = 20$, $b = 48$. Радиус описанной около треугольника окружности равен 25. Найдите площадь треугольника.

## С—12

1. Сторона ромба $ABCD$ равна 10, диагональ $AC$ равна 16, $F \in AC$, $K \in BD$. Найдите скалярные произведения: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{KD} \cdot \overrightarrow{FC}$.
2. Прямая задана двумя точками: $P(-4;\ 6)$ и $T(2;\ -3)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямой $PT$ и положительным направлением оси $Oy$.

## С—13

1. Используя микрокалькулятор, найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$ и $\widehat{\vec{m}\vec{n}} = 120°$.
2. В треугольнике $EFK$ $FE = 2$, $FK = 3\sqrt{2}$, $\angle EFK = 135°$. Найдите длину медианы $FM$.

## С—14

1. Вокруг правильного многоугольника описана окружность, радиус которой равен $R$. Сторона этого многоугольника удалена от центра окружности на расстояние, равное $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Чему равно число сторон этого многоугольника?
2. Докажите, что произведения отрезков двух пересекающихся диагоналей правильного многоугольника равны между собой.

## С—15

1. В окружность вписаны правильный шестиугольник и квадрат. Площадь шестиугольника равна $Q$. Найдите сторону и площадь квадрата.
2. В окружность вписан правильный треугольник, и вокруг окружности описан правильный треугольник. Найдите отношение их площадей.
3. С помощью циркуля и линейки опишите около окружности правильный треугольник.

## С—16

1. Найдите периметр заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 21, если радиус окружности с центром $O$ равен $R$, $\smile AMB = 90°$.
2. Дуга, радиус окружности которой равен 6 см и центральный угол 120°, свернута в окружность. Найдите радиус окружности.

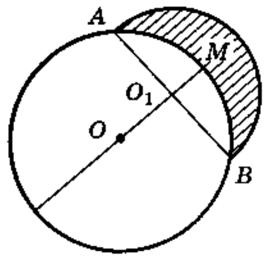


Рис. 21

## С—17

1. Стороны треугольника равны 5, 5 и 8. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 22.

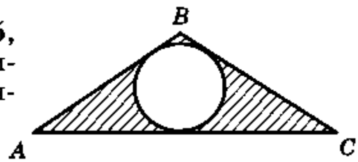


Рис. 22

2. Дуга $AB$ равна 60°, а радиус окружности $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 23.
3. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

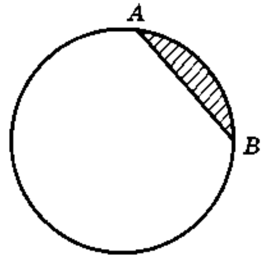


Рис. 23

## С—18

1. Постройте произвольный треугольник и его образ при симметрии относительно точки пересечения его высот.
2. Докажите, что при движении подобные прямоугольники отображаются на подобные прямоугольники.

## С—19

1. В прямоугольном треугольнике $ABC$ $AE$ — биссектриса. Точки $K$ и $P$ принадлежат биссектрисе $AE$ ($A—K—P$). Постройте образ треугольника $ABC$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{PK}$.
2. Даны два равных треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$, основания которых $AC$ и $A_1C_1$ лежат на одной прямой $l$. Расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников $M$ и $M_1$ равно 8 см. Прямая $p$, параллельная $l$, пересекает стороны этих треугольников в точках $E$, $F$, $K$ и $P$ ($E—F—K—P$). Найдите длину отрезка $FP$.

## С—20

1. Постройте образ угла $MHP$ (рис. 24), полученного поворотом вокруг центра $O$ на 120° против часовой стрелки.
2. На окружности, центром которой является точка $O$, отмечены в одном направлении последовательно точки $A$, $B$, $C$ и $D$ так, что $\angle AOB = \angle COD$. Докажите, что $AC = BD$.

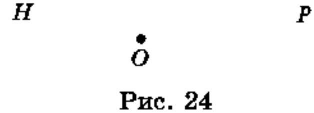


Рис. 24

## С—1

1. В треугольнике $ABC$ $E \in BC$, причем $BE : EC = 3 : 5$. Разложите вектор $\overrightarrow{AE}$ по векторам $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $AC = \vec{b}$.
2. В треугольнике $ABC$ $D \in AB$ и $E \in BC$, причем $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$. Используя векторы, докажите, что $DE \parallel AC$.

## С—2

1. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Постройте вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Какие координаты имеет этот вектор?
2. На рисунке 25 треугольник $OAB$ равносторонний со стороной, равной $a$. Разложите векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{BN}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если $M$ и $N$ — середины сторон $AB$ и $OA$.

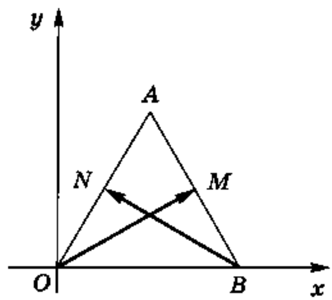

Рис. 25

3. $\vec{a}\,\{-1;\ 5\}$, $\vec{b}\,\{m;\ 2\}$. При каких значениях $m$ эти векторы будут коллинеарными?

## С—3

1. Даны точки $A(2;\ 3)$, $B(5;\ 5)$, $C(8;\ 3)$ и $D(5;\ 1)$. Докажите, что отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
2. Треугольник задан координатами своих вершин: $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ 1)$, $C(2;\ 2)$. Определите вид треугольника. Найдите координаты центра описанной вокруг треугольника окружности и ее радиус.

## С—4

В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$) $AC = 3$, $AB = 5$, $AM$ — биссектриса угла $CAB$. Найдите длину медианы $ME$ треугольника $AMB$.

## С—5

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$, есть окружность. Каково взаимное расположение этой окружности и окружности $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$?
2. В прямоугольной системе координат треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(-4; -1)$, $B(0; 2)$, $C(4; -1)$. Напишите уравнение окружности, вписанной в этот треугольник.

## С—6

1. Составьте уравнение прямой, если точка $C(3; 4)$ служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат на эту прямую.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y - x = 0$, $y + x = 0$ и $y - 2x + 4 = 0$.

## С—7

1. Прямая $2y + x - 4 = 0$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 5$. Найдите длину хорды, которая отсекается этой окружностью на прямой.
2. Даны две точки $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 4. Найдите множество всех точек $M$, для которых $MA^2 + MB^2 = 10$.

## С—8

1. В треугольнике $ABC$ $AA_1$ и $CC_1$ — медианы. Они пересекаются в точке $O$. $AA_1 = 9$ см, $CC_1 = 12$ см, $\angle AOC = 120°$. Найдите площадь треугольника.
2. Трапеция $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) вписана в окружность так, что основание $AD$ — диаметр окружности. Диагональ трапеции равна 10 см, а ее площадь 25 см$^2$. Найдите углы трапеции.

## С—9

1. В треугольнике $ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Точка $D$ лежит на стороне $BC$, $\angle DAC = \beta$. Найдите отношение площадей треугольников $ABD$ и $ADC$.
2. В треугольнике $ABC$ $AB = 5$, $BC = 9$, $BE \perp AC$, $BE = 3$ ($A$—$E$—$C$). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

## С—10

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 4$, $BC = 5$. Площадь треугольника равна $5\sqrt{3}$. Найдите высоту, опущенную из вершины $B$, если $\cos \angle ABC < 0$.
2. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $a + b = 21$, $\angle A = 64°$, $\angle B = 50°$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике $ABC$ $BC = 3{,}4$, $\angle ABC = 130°$. Площадь треугольника равна 3,6. Найдите $AC$.

## С—12

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) $\angle A = 90°$, $AD = 6$, $BC = 2$, $AB = 3$. Найдите скалярное произведение: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.
2. В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$) $A(x;\ 3)$, $B(1;\ 1)$ и $C(-2;\ 4)$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между медианой $CE$ и гипотенузой $AB$.

## С—13

1. В треугольнике $ABC$ $AD$, $BE$ и $CF$ — медианы. Вычислите $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.
2. В треугольнике $ABC$ отрезок $CD$ — медиана, причем $CD^2 > \frac{1}{4} AB^2$. Докажите, что $\angle C$ — острый.

## С—14

1. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Площадь треугольника $ABC$ равна 12 см$^2$. Найдите площадь шестиугольника.
2. Сторона правильного пятиугольника $ABCDE$ равна 2. Диагонали $AD$ и $BE$ пересекаются в точке $O$. Найдите $AO$.

## С—15

1. По данному радиусу $R$ найдите сторону и площадь правильного вписанного в окружность двенадцатиугольника.
2. Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды. Хорда равна $a$ и служит в одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его апофеме.

## С—16

1. На рисунке 26 $AMB$, $AKC$, $CLD$, $DPB$ — полуокружности с диаметрами $AB$, $AC$, $CD$ и $DB$. Докажите, что путь от $A$ до $B$ по полуокружности $AMB$ равен пути по полуокружностям $AKC$, $CLD$ и $DPB$.

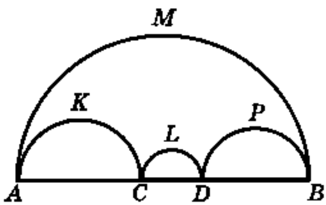


Рис. 26

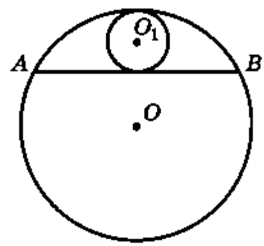


Рис. 27

2. В сегмент, дуга которого содержит 120° и длина дуги которого равна $l$, вписана наибольшая окружность (рис. 27). Найдите длину этой окружности.

## С—17

1. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности, которая касается меньшей, равна $a$. Найдите площадь кольца.

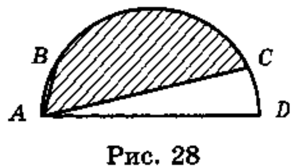


Рис. 28

2. На рисунке 28 изображен полукруг с диаметром $AD$, $\smile AB = \smile CD = 30°$. Площадь полукруга равна $Q$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.
3. Данный круг разделите окружностью, концентрической его окружности, на две равные по площади части.

## С—18

1. При помощи одной линейки постройте ось симметрии равнобедренной трапеции.

2. При некотором движении отрезок $AB$ отображается на отрезок $EP$, $AB = 12$ см. Точка $M$ принадлежит отрезку $AB$, $AM = 2$ см. Точка $M$ отображается на точку $H$. Найдите $HE$.

## С—19

1. На рисунке 29 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$. Постройте образ этой трапеции при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Затем только при помощи циркуля постройте образ точки $X$ при этом переносе.

2. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ такую, чтобы $\angle BAD = 90°$, $AC \perp BD$ и диагонали были бы равны двум данным отрезкам ($BD > AC$).

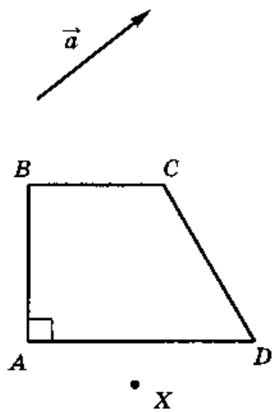


Рис. 29

## С—20

1. На двух данных окружностях (рис. 30) найдите такую пару точек, что поворот вокруг данной точки $O$ на 60° отображает одну точку этой пары на другую.

2. Через центр $O$ правильного треугольника $ABC$ проведены две прямые, образующие между собой угол, равный 60°. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны.

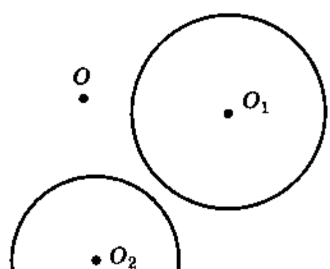


Рис. 30

## ВАРИАНТ 6

### С—1

1. В треугольнике $MPO$ $K \in MP$, причем $MK : KP = 3 : 7$. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OK} = \vec{m}$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{n}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $E \in AB$, $P \in BC$, $T \in CD$, $M \in AD$, причем $AE : EB = AM : MD = 2 : 5$ и $BP : PC = DT : TC = 3 : 7$. Используя векторы, докажите, что $ME \parallel PT$.

### С—2

1. $\vec{m} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{n} = -5\vec{i} + 6\vec{j}$. Постройте вектор, равный разности векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Какие координаты имеет этот вектор?
2. На рисунке 31 треугольник $OAB$ равносторонний со стороной, равной $m$. Разложите векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BF}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, если $F$ и $E$ — середины сторон $OA$ и $OB$.
3. $\vec{a}\ \{4; -3\}$, $\vec{b}\ \{m; 0\}$. При каких значениях $m$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны?

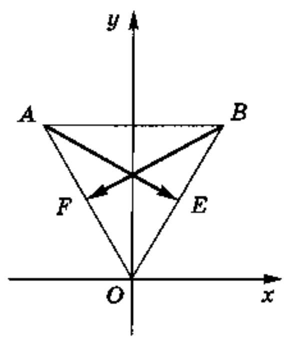


Рис. 31

### С—3

1. Даны точки $A(-4; -6)$, $B(2; 8)$, $C(16; 14)$ и $D(10; 0)$. Докажите, что отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются и взаимно перпендикулярны.
2. Треугольник задан координатами своих вершин $A\ (1; 0)$, $B\ (2; 1)$, $C\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$. Найдите радиус описанной вокруг треугольника окружности.

## С—4

В прямоугольной трапеции $ABCD$ $AD$ и $BC$ — основания, $\angle BAD = 90°$, $AB = AD = 4$, $AC$ пересекает $BD$ в точке $O$, причем $BO : OD = 1 : 3$. Найдите длину медианы $CE$ треугольника $BCD$.

## С—5

1. Докажите, что линия, заданная уравнением $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, есть окружность. Каково взаимное расположение этой окружности и окружности $(x - 4)^2 + y^2 = 9$?
2. В прямоугольной системе координат треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин $A(1;\ 3)$, $B(1;\ -3)$, $C(-3;\ 0)$. Напишите уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

## С—6

1. Прямая $y + 2x - 1 = 0$ пересекает ось $Oy$ в точке $A$. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A$ и перпендикулярной к данной прямой.
2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $y + x = 0$, $y + 2x - 4 = 0$ и $y - 3x - 4 = 0$.

## С—7

1. На прямой $4y + 3x - 12 = 0$ окружность с центром в начале координат отсекает хорду, длина которой равна 2. Напишите уравнение этой окружности.
2. Даны две точки $A$ и $B$, расстояние между которыми равно 4. Найдите множество точек $M$, для которых $MA^2 - MB^2 = 4$.

## С—8

1. В треугольнике $ABC$ $AA_1$ и $CC_1$ — медианы, они пересекаются в точке $O$, $AA_1 = \frac{9}{2}$, $CC_1 = 6$. Площадь треугольника $ABC$ равна 9. Найдите $\angle AOC$.
2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) $AD = m$, $BD \perp AB$, $\angle BAD = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

## С—9

1. В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $BD$ — высота. Через середину высоты проведена прямая, пересекающая стороны $AB$ и $BC$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Найдите $EF$, если $BD = h$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BEF = \alpha$.
2. Треугольник $ABC$ вписан в окружность, радиус которой равен 5, $BD \perp AC$ ($A$—$D$—$C$), $AB = 5$, $AD = 3$. Найдите $BC$.

## С—10

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 3$. Площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности, если ее центр лежит внутри треугольника.
2. Стороны треугольника равны 25, 39, 56. Найдите высоту, опущенную на большую сторону.

## С—11

1. В треугольнике $ABC$ $a - b = 0{,}85$, $\angle A = 112°$, $\angle B = 36°$. Найдите неизвестные элементы треугольника.
2. В треугольнике $ABC$ $AB = 2{,}1$, $BC = 3{,}2$, $\angle ABC = 53°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

## С—12

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD$ и $BC$ соответственно равны 15 и 5, $CD = 13$, $CE \perp AD$. Найдите скалярное произведение:

   1) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. В четырехугольнике $ABCD$ $A(1; -3)$, $B(x; -1)$, $C(2; 1)$, $D(1; 2)$, $AC \perp BD$, точка $M$ — середина $AB$. Используя микрокалькулятор, найдите угол между прямыми $DM$ и $DA$.

## С—13

1. Даны три точки, для которых $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2} AB^2$. Докажите, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

2. В треугольнике $ABC$ $BC > AC$, $CD$ — медиана. Докажите, что $\angle BDC$ — тупой.

## С—14

1. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 144 см$^2$. Найдите площадь треугольника $ABC$.

2. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $AC$ и $BE$ пересекаются в точке $O$, $BO = 2$. Найдите сторону пятиугольника.

## С—15

1. По данному радиусу $R$ найдите сторону и площадь правильного вписанного в окружность восьмиугольника.

2. Центры двух пересекающихся окружностей расположены по одну сторону от их общей хорды. Хорда равна $a$ и служит в одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — вписанного квадрата. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку, равному его меньшей диагонали.

## С—16

1. На рисунке 32 $ATB$, $AEC$, $CFD$ и $DMB$ — полуокружности с диаметрами $AB$, $AC$, $CD$ и $DB$. Докажите, что путь от $A$ до $B$ по полуокружности $ATB$ равен пути по полуокружностям $AEC$, $CFD$ и $DMB$.

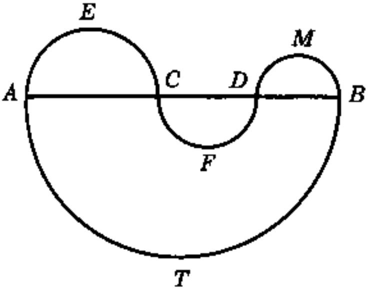


Рис. 32

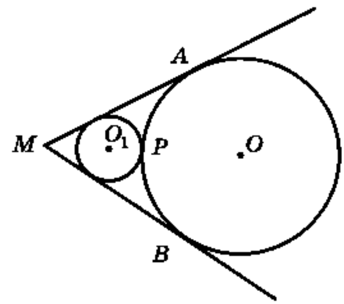


Рис. 33

2. Из точки $M$ к окружности проведены касательные $MA$ и $MB$ (рис. 33), $\smile APB = 120°$, а ее длина равна $l$. Найдите длину окружности, вписанной в фигуру $MAPB$.

## С—17

1. Даны две концентрические окружности. Хорда большей окружности касается меньшей. Найдите длину хорды, если площадь кольца равна $4\pi$ см$^2$.

2. На рисунке 34 изображен полукруг с диаметром $AD$, $\smile AB = \smile CD = 45°$. Площадь заштрихованной фигуры равна $Q$. Найдите площадь полукруга.

3. Постройте круг, имеющий такую же площадь, что и данное кольцо.

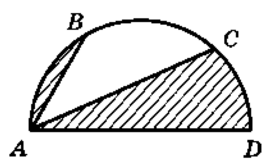


Рис. 34

## С—18

1. На рисунке 35 отрезки $AB$ и $A_1B_1$ центрально симметричны относительно некоторого центра. С помощью одной линейки постройте образ точки $M$ при этой симметрии.
2. Точка $K$ принадлежит отрезку $MH$ и делит его в отношении 3 : 2, считая от точки $M$. При некотором движении отрезок $MH$ отображается на отрезок $EP$, а точка $K$ — на точку $T$. Найдите отношение $ET : TP$.

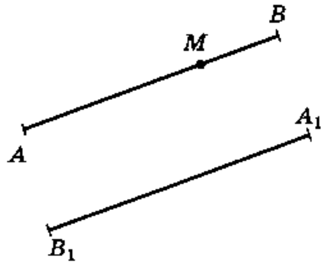

Рис. 35

## С—19

1. На рисунке 36 изображена трапеция $ABCD$. Постройте образ этой трапеции при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Затем только при помощи циркуля постройте образ точки $Y$ при этом переносе.
2. Постройте трапецию по двум диагоналям, углу между ними и одной из боковых сторон.

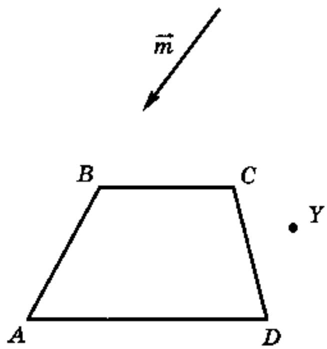

Рис. 36

## С—20

1. Укажите соответственно на данных прямой и отрезке такие две точки (рис. 37), чтобы одну из них можно было бы отобразить на другую поворотом вокруг данной точки $O$ на 30°.
2. Дан квадрат $ABCD$. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, отличные от прямых $AC$ и $BD$. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, равны.

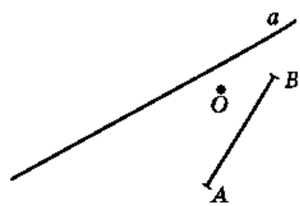

Рис. 37

## С—1

2. В треугольнике $ABC$ $E \in BC$ и $D \in AC$, причем $\frac{BE}{EC} = \frac{4}{5}$ и $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$, $AE$ пересекает $BD$ в точке $O$. Найдите $\frac{BO}{OD}$.
2. В трапеции $ABCD$, где $AD$ и $BC$ — основания, $M \in AB$ и $N \in CD$, причем $MN \parallel AD$. Докажите, что если $BN \parallel MD$, то и $MC \parallel AN$.

## С—2

1. Даны три вектора $\vec{a}\{3; -1\}$, $\vec{b}\{1; -2\}$ и $\vec{c}\{-1; 7\}$. Найдите разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

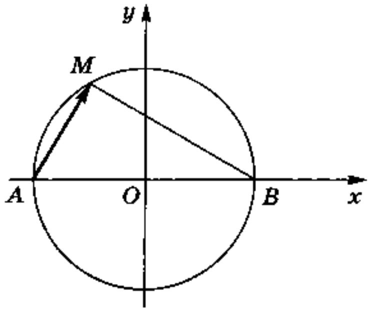


Рис. 38

2. На рисунке 38 $AM = 5$, $MB = 12$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами: $\overrightarrow{AB}\{3; 4\}$, $\overrightarrow{CD}\{-2; 1\}$. Найдите координаты вектора $-\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{DC}$.

## С—3

1. Точки $A$ и $B$ имеют координаты $A(1; 2)$, $B(7; 10)$. Найдите координаты точки $C$, делящей отрезок $AB$ в отношении $1 : 3$, считая от точки $A$.
2. Лежат ли точки $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$ и $C(2; 14)$ на одной прямой?
3. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$), сонаправленного с вектором $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

## С—4

Докажите методом координат, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

## С—5

1. В квадрат вписана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин квадрата есть величина постоянная.
2. Даны окружность $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и точка $C(5;\ 4)$. Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

## С—6

1. При каких значениях $k$ прямая $y - kx - 5 = 0$ удалена от начала координат на расстояние, равное 3?
2. Пусть $M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 3)$ и $M(1;\ 2)$. Напишите уравнение прямой $AC$ и найдите координаты вершины $C$.

## С—7

1. Составьте уравнение окружности, если ее центр находится в точке $C\ (5;\ 4)$ и окружность отсекает от прямой $x + 2y - 3 = 0$ хорду, длина которой равна 8.
2. Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $a$ и $b$ ($\angle C = 90°$). Найдите множество точек $M$, для которых $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

## С—8

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$. $S_{BOC} = 20$ см$^2$, $S_{COD} = 40$ см$^2$, $S_{AOD} =$ $= 60$ см$^2$, $AB = 12$ см, $OA = 10$ см, $\angle AOB > 31°$. Найдите $\angle BAO$.
2. В треугольнике $ABC$ $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Точка $D$ лежит на стороне $AC$, $\angle ABD = \beta$. Найдите $BD$.

## С—9

1. Из вершины $A$ равностороннего треугольника $ABC$ проведен луч, пересекающий сторону $BC$, и на нем выбрана некоторая точка $M$, $\angle AMB = 20°$, $\angle AMC = 30°$. Найдите $\angle MAB$.

2. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны $m$ и $n$, а прилежащие к основанию $m$ углы равны $\alpha$ и $\beta$.

## С—10

1. Пусть $CD$ — диаметр окружности с центром в точке $O$ и $AB$ — параллельная этому диаметру хорда. На диаметре $CD$ выбрана точка $M$. Докажите, что сумма $MA^2 + MB^2$ не зависит от положения хорды $AB$.

2. Докажите, что в любом треугольнике углы $A$, $B$ и $C$ связаны соотношением
$$\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C.$$

## С—11

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 27{,}1$, $AC = 34{,}5$, $\angle CAD = 36°15'$. Найдите периметр параллелограмма.

2. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 6$, $AD = 4$, $AC = 7$. Диагонали пересекаются в точке $O$. Найдите $\angle AOB$.

## С—12

1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AD$ и $BC$ — основания, $AD = 5$, $BC = 3$. Найдите
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. В треугольнике $ABC$ $A$ (3; 2), $B$ (4; 5) и $C$ (7; 10). Найдите высоту, опущенную из вершины $A$.

## С—13

1. $ABCD$ — прямоугольник. Докажите, что верно равенство
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2,$$
где $M$ — произвольная точка плоскости.

2. Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что высота трапеции есть среднее пропорциональное между ее основаниями.

## С—14

1. Какими равными правильными многоугольниками можно покрыть плоскость без просветов?
2. От каждой вершины квадрата на его сторонах отложены отрезки, равные половине его диагонали. Полученные восемь точек последовательно соединены отрезками. Определите вид полученного восьмиугольника.

## С—15

1. Сторона правильного двенадцатиугольника $A_1A_2...A_{12}$ равна $a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_6A_7A_8$.
2. В трапеции $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) меньшее основание равно $a$, углы, прилежащие к этому основанию, равны 105°, диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.
3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник, площадь которого в два раза больше площади данного правильного шестиугольника.

## С—16

1. Три окружности, длины которых равны $c$, касаются друг друга. Найдите длину окружности, которая внутренним образом касается трех данных окружностей.

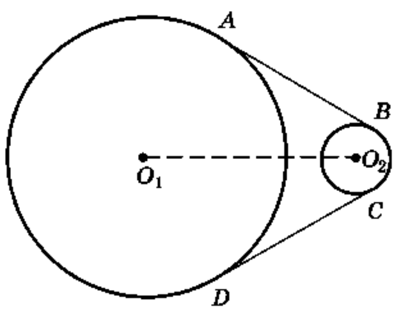


Рис. 39

2. Найдите длину приводного ремня (рис. 39), если $O_1$ и $O_2$ — центры двух шкивов, радиусы которых 8 дм и 2 дм. Расстояние между центрами равно 12 дм.

## С—17

1. Две окружности, имеющие радиусы $r$ и $3r$, внешне касаются. $AB$ — их общая касательная. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 40.

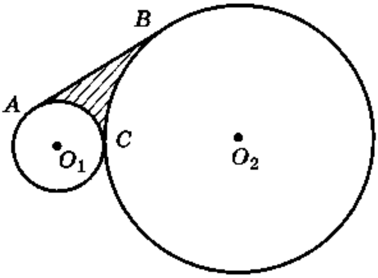


Рис. 40

2. $ABC$ — прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), $AC = b$, $BC = a$, $CD \perp AB$. Длина окружности, вписанной в треугольник $ADC$, равна $c$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник $CDB$.

3. Данный круг разделите двумя его концентрическими окружностями на три части, имеющие равные площади.

## С—18

1. На рисунке 41 изображены две окружности и прямая $l$. Найдите на этих окружностях точки, симметричные друг другу относительно прямой $l$.

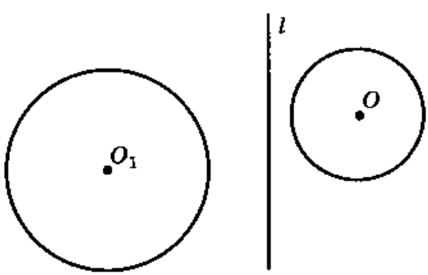


Рис. 41

2. Докажите, что равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AB$ и $CD$ — основания) равны, если $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ и $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$.

## С—19

1. На рисунке 42 изображены две окружности с центрами в точках $O_1$ и $O_2$ и прямая $m$. Проведите прямую $l$, параллельную $m$, так, чтобы эти окружности на этой прямой высекали равные хорды.

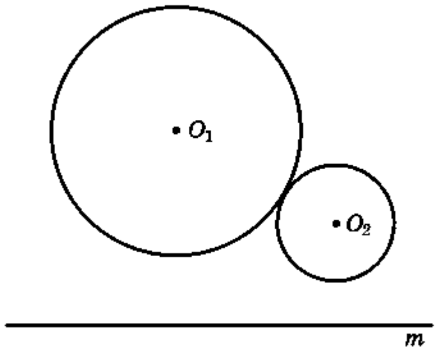


Рис. 42

2. Докажите, что если в треугольнике медианы равны, то треугольник равнобедренный.

## С—20

1. Постройте правильный треугольник так, чтобы одна его вершина совпадала с точкой $P$, другая принадлежала прямой $a$, а третья — прямой $b$ (рис. 43).

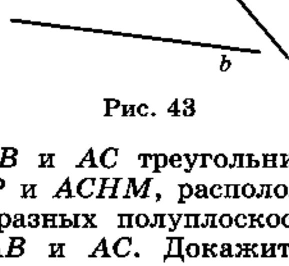


Рис. 43

2. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ постройте квадраты $ABEP$ и $ACHM$, расположенные с треугольником $ABC$ в разных полуплоскостях соответственно с границами $AB$ и $AC$. Докажите, что $PC = BM$ и $PC \perp BM$.

## ВАРИАНТ 8

### С—1

1. В треугольнике $MET$ $A \in MT$, $B \in ET$, $AE$ и $MB$ пересекаются в точке $O$, причем $\frac{EO}{OA} = \frac{4}{3}$ и $\frac{MA}{AT} = \frac{2}{5}$. Найдите $\frac{EB}{BT}$.
2. В параллелограмме $ABCD$ $N \in AC$ и $M \in AD$, причем $AN : NC = 1 : 5$ и $AM : MD = 1 : 4$. Докажите, что точки $B$, $N$ и $M$ лежат на одной прямой.

### С—2

1. Даны три вектора $\vec{m}\,\{-1;\ 2\}$, $\vec{p}\,\{4;\ -2\}$ и $\vec{t}\,\{2;\ -3\}$. Разложите вектор $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{t}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{p}$.

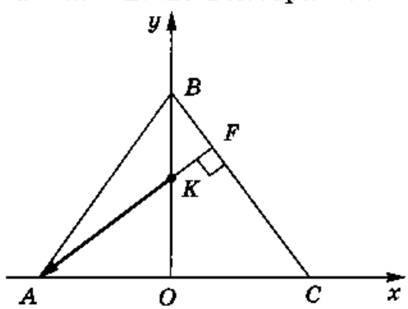


Рис. 44

2. На рисунке 44 $AB = BC = 5$, $AC = 6$, $AF \perp BC$. Разложите вектор $\overrightarrow{KA}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заданы своими координатами: $\overrightarrow{AB}\,\{2;\ -1\}$, $\overrightarrow{CD}\,\{3;\ 1\}$. Найдите координаты вектора $2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

### С—3

1. Точка $M$ делит отрезок $PK$ в отношении $3 : 1$, считая от точки $P$. Найдите координаты точки $P$, если заданы координаты точек $M$ и $K$: $M\,(2;\ -4)$, $K\,(3;\ 5)$.
2. Лежат ли точки $M\,(1;\ -2)$, $H\,(3;\ -5)$ и $P\,(5;\ -8)$ на одной прямой?
3. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$), противоположно направленного вектору $\vec{m} = 5\vec{i} - 12\vec{j}$.

## С—4

Даны прямоугольник $ABCD$ и точка $M$. Докажите, что равенство $MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2$ не зависит от положения точки $M$.

## С—5

1. Около квадрата описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности.
2. Даны окружность $x^2 + y^2 - 4x - 2 - 11 = 0$ и точка $M$ (3; 1). Напишите уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внутренним образом.

## С—6

1. Прямая $y - mx - 4 = 0$ пересекает оси координат в точках $A$ и $B$. При каких значениях $m$ длина медианы $OE$ треугольника $AOB$ равна 7?
2. Даны вершины треугольника $ABC$: $A(4;\ 6)$, $B(-4;\ 0)$, $C(-1;\ -4)$. Составьте уравнение биссектрисы угла $B$.

## С—7

1. Прямая $y + 2x - 4 = 0$ пересекает окружность $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Найдите длину хорды, которая отсекается этой окружностью от прямой.
2. Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами $a$ и $b$ ($\angle C = 90°$). Найдите множество точек $M$, для которых $MA^2 - MB^2 = 2MC^2$.

## С—8

1. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$, $S_{BOC} = 30$ см$^2$, $S_{COD} = 60$ см$^2$, $S_{AOD} = 90$ см$^2$, $OA = 10$, $OB = 9\sqrt{2}$, $\angle BAO + \angle ABO < 46°$.

   Найдите $\angle AOB$.
2. В треугольнике $ABC$ точка $D$ лежит на стороне $AC$, $BD = m$, $BC = n$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$. Найдите длину стороны $AB$.

## С—9

1. Угол при вершине $B$, противолежащий основанию $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$, равен $20°$. На стороне $AB$ выбрана точка $D$ так, что $\angle ACD = 50°$, а на стороне $BC$ — точка $F$ так, что $\angle FAC = 60°$. Найдите $\angle AFD$.
2. Около треугольника $ABC$ описана окружность, $BC = a$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = \beta$. Биссектриса угла $A$ пересекает окружность в точке $K$. Найдите $AK$.

## С—10

1. Дан угол $BAC$. Внутри него выбрана точка $M$, удаленная от сторон угла на расстояния $a$ и $b$. Найдите $AM$, если $\angle BAC = \alpha$.
2. Докажите, что в любом треугольнике углы $A$, $B$ и $C$ связаны соотношением
$$2 \sin A \sin B \cos C - 1 = \cos^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B.$$

## С—11

1. В параллелограмме $ABCD$ $AC = 28{,}3$, $CD = 25{,}7$, $\angle BCA = 55°30'$. Найдите площадь параллелограмма.
2. $ABCD$ — выпуклая ломаная линия. $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 7$, $\angle ABC = 110°$, $\angle BCD = 140°$. Найдите расстояние между точками $A$ и $D$.

## С—12

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD$ и $BC$ — основания. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$, если разность оснований равна $m$.
2. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$ и $D(1; 6)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, и найдите ее высоту.

## С—13

1. Докажите, что в трапеции $ABCD$ с основаниями $AB$ и $CD$ выполняется равенство
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC.$$
2. В треугольнике $ABC$ $\angle B = 60°$, $AD$ — медиана, $E \in AC$, причем $CE : EA = 1 : 3$, $AD \perp BE$, $AB = 2$. Найдите $BC$.

## С—14

1. Можно ли покрыть плоскость без просвета правильными четырехугольниками и восьмиугольниками? Если да, то в каком-то из возможных случаев найдите отношение их сторон.

2. Прямоугольник пересечен двумя парами параллельных прямых так, что получился правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон прямоугольника.

## С—15

1. Сторона правильного восьмиугольника $A_1A_2...A_8$ равна $a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Найдите площадь четырехугольника $A_1A_4A_5A_6$.

2. В окружность, радиус которой равен $R$, вписана трапеция, ее вершины делят окружность в отношении 2 : 3 : 2 : 5. Найдите площадь трапеции.

3. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник, площадь которого в два раза меньше площади данного правильного шестиугольника.

## С—16

1. Даны четыре окружности, каждая из которых касается двух других. Длины окружностей равны $c$. Найдите длину окружности, которая внутренним образом касается всех данных окружностей.

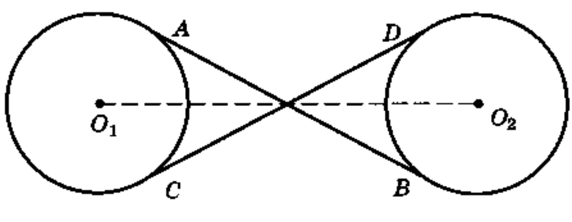


Рис. 45

2. Найдите длину приводного ремня (рис. 45), если $O_1$ и $O_2$ — центры шкивов, радиусы которых равны 25 см, а расстояния между центрами 100 см.

## С—17

1. В сектор с центральным углом в 60° и радиусом, равным $R$, вписана окружность. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 46.

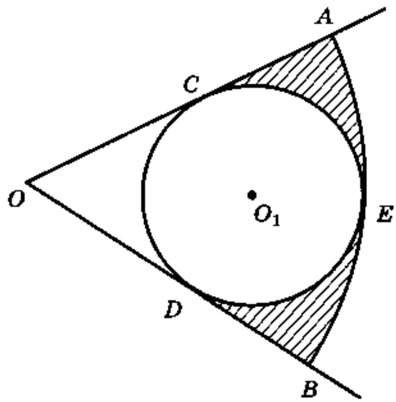


Рис. 46

2. В треугольнике $ABC$ $E \in AB$ и $F \in BC$, причем $\angle BEF = \angle BCA$, $BF = m$, $AB = n$. Длина окружности, вписанной в треугольник $EBF$, равна $c$. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник $ABC$.
3. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей трех данных кругов.

## С—18

1. На рисунке 47 изображены прямые $a$ и $b$ и точка $O$. Найдите на этих прямых точки, симметричные друг другу относительно центра $O$.
2. Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма равны диагоналям и углу между ними другого параллелограмма.

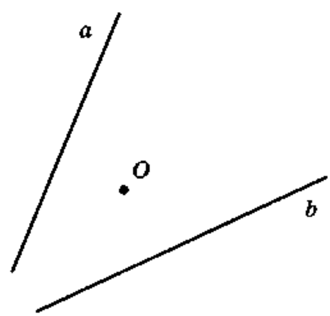


Рис. 47

## С—19

1. Даны два неравных равнобедренных треугольника, расположенные так, что их основания лежат на одной прямой $l$ (рис. 48). Проведите прямую $m$, параллельную $l$, так, чтобы отрезки прямой $m$, которые образуются при пересечении этой прямой со сторонами треугольника, были равны (отрезки, заключенные между сторонами треугольников).

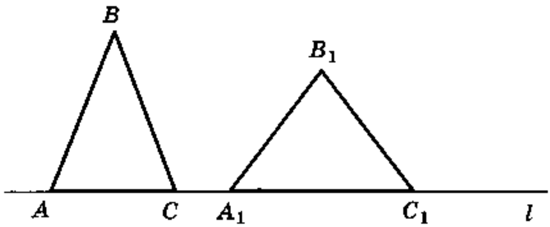


Рис. 48

2. Прямые, которые принадлежат боковым сторонам трапеции, перпендикулярны. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

## С—20

1. Постройте правильный треугольник, одна вершина которого совпадает с данной точкой $A$, а две другие принадлежат двум данным окружностям (рис. 49).

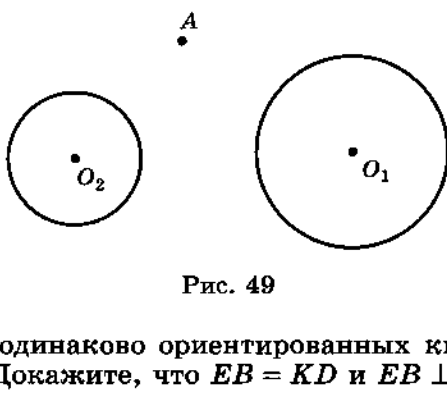


Рис. 49

2. Даны два одинаково ориентированных квадрата $ABCD$ и $AEFK$. Докажите, что $EB = KD$ и $EB \perp KD$.

# РАБОТЫ НА ПОВТОРЕНИЕ

**ВАРИАНТ 1** **П—1**

**1.** На рисунке 50 треугольник $ABC$ равнобедренный ($AB = BC$), $DF \parallel AC$ и $CF \parallel AB$, $AB = 13$, $BD = 7$, $AC = 10$.

1) Докажите, что $\triangle ADE = \triangle CED$.

2) Докажите, что $\triangle ECF \sim \triangle ABC$.

3) Найдите $EF$.

4) Найдите высоту треугольника $ABC$, опущенную на боковую сторону.

5) Найдите отношение площадей треугольников $ADE$ и $DCF$.

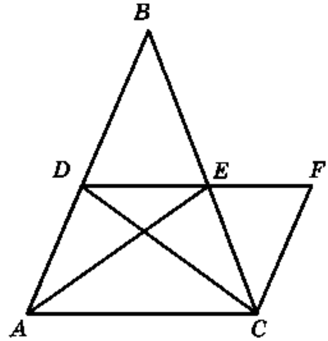


Рис. 50

**2.** Начертите тупоугольный треугольник и постройте точку пересечения прямых, которым принадлежат высоты треугольника.

**ВАРИАНТ 2** **П—1**

**1.** На рисунке 51 треугольник $ABC$ равнобедренный ($AB = BC$), $BD \perp AC$, $\angle AKM = \angle BMA$, $AB = 17$, $AC = 16$, $MD = 6$.

1) Докажите, что $\triangle ABM = \triangle BMC$.

2) Докажите, что $\triangle AKM \sim \triangle BMC$.

3) Найдите $KM$.

4) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.

5) Найдите площадь треугольника $AKM$.

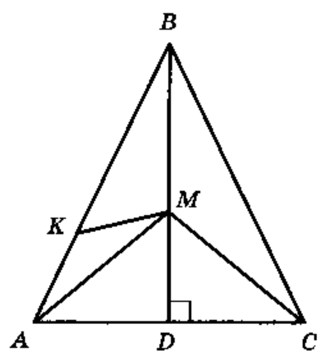


Рис. 51

**2.** Начертите остроугольный треугольник и опишите около него окружность.

## ВАРИАНТ 3 П—1

1. На рисунке 52 треугольник $ABC$ прямоугольный, $\angle C = 90°$, $M$ — середина $AB$, $DM \perp AB$, $AF \parallel BC$, $CK \parallel DM$, $DM = 8$, $MB = 15$.

1) Докажите, что $\triangle AFM = \triangle DMB$.

2) Докажите, что $\triangle AFM \sim \triangle ABC$.

3) Найдите стороны $\triangle ABC$.

4) Найдите радиус вписанной в треугольник $DMB$ окружности и длину медианы в треугольнике $ABC$, проведенной из вершины прямого угла.

5) Найдите отношение площадей треугольников $AKC$ и $CKB$.

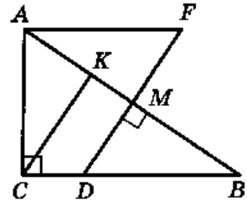

Рис. 52

2. Начертите тупоугольный треугольник и опишите около него окружность.

## ВАРИАНТ 4 П—1

1. На рисунке 53 $AA_1$ и $BB_1$ — медианы, $AA_1 = 12$, $BB_1 = 9$, $B_1E = 3$, $B_1K = 9$, $B_1P = 21$, $\angle AMB_1 = 60°$.

1) Докажите, что $\triangle B_1CE = \triangle AMB_1$.

2) Найдите $AC$ и докажите, что $\triangle B_1PK \sim \triangle AMB_1$.

3) Найдите $KP$.

4) Докажите, что $KP \parallel AA_1$.

5) Найдите площадь треугольника $ABC$.

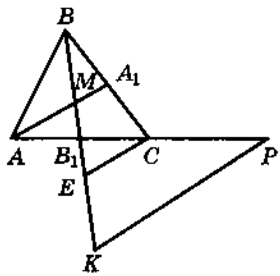

Рис. 53

2. Начертите треугольник и впишите в него окружность.

## ВАРИАНТ 5 П—1

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 3$ (рис. 54), $BB_1$ — биссектриса, $\angle BB_1A = \angle BB_1E$, $MC \parallel B_1E$.

1) Докажите, что $\triangle BB_1A = \triangle BB_1E$.

2) Докажите, что $\triangle BCM \sim \triangle BAB_1$.

3) Найдите $MC$.

4) Найдите площадь треугольника $ABC$.

5) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $B_1EC$.

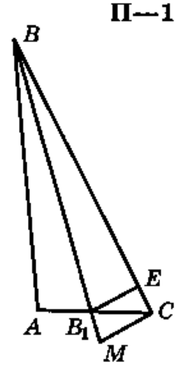

Рис. 54

2. Начертите треугольник и постройте какой-либо треугольник, площадь которого в 2,25 раза больше данного.

## ВАРИАНТ 6 П—1

1. На рисунке 55 $AF = AE = 4$, $\angle A = 25°$, $\angle AFC = \angle AED = 100°$, $BC \parallel DE$.

1) Докажите, что $\triangle FKD = \triangle EKC$.

2) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle AFC$.

3) Найдите стороны треугольника $AFC$.

4) Найдите отношение периметров треугольников $AFC$ и $ABC$.

5) Найдите площадь треугольника $ABC$.

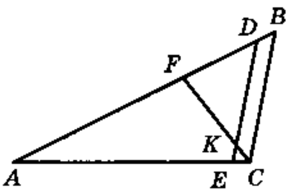

Рис. 55

2. Начертите прямоугольный треугольник и постройте точку пересечения его медиан.

## ВАРИАНТ 1 П—2

Через середину $O$ диагонали $AC$ прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны $BC$ и $AD$ в точках $P$ и $K$ соответственно.

1) Докажите, что $APCK$ — параллелограмм.

2) Найдите площадь $APCK$, если $AK = 4$, $KD = 8$ и $AC = 13$.

3) Найдите $PK$.

4) С помощью микрокалькулятора найдите угол $AOK$.

## ВАРИАНТ 2 П—2

На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ квадрата $ABCD$ выбраны точки $P$, $E$, $F$ и $K$, такие, что $AP = BE = CF = DK = 1$, $EK = 10$, $EK$ и $PF$ пересекаются в точке $M$.

1) Докажите, что $PF \perp EK$. Найдите площадь $PEFK$.

2) Найдите стороны квадрата $ABCD$.

3) Докажите, что около четырехугольника $APMK$ можно описать окружность.

4) Найдите радиус этой окружности.

## ВАРИАНТ 3 П—2

В параллелограмме $ABCD$ через середину $O$ диагонали $BD$ перпендикулярно к ней проведена прямая, пересекающая $BC$ в точке $M$, а $AD$ — в точке $F$, $BD = 8$, $MF = 6$, $AF = 5$.

1) Докажите, что $BMDF$ — ромб.

2) Найдите радиус вписанной в этот ромб окружности.

3) С помощью микрокалькулятора найдите угол $ODF$.

4) Найдите периметр параллелограмма $ABCD$.

## ВАРИАНТ 4 П—2

В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ взаимно перпендикулярны, $E$, $F$, $M$ и $K$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно, $S_{EFMK} = 100$.

1) Докажите, что $EFMK$ — квадрат.

2) Найдите диагонали трапеции и ее площадь.

3) Найдите высоту трапеции.

4) Найдите основания трапеции, если ее средняя линия пересекает $AC$ в точке $T$, $BD$ — в точке $Q$ и $TQ = 2\sqrt{2}$.

## ВАРИАНТ 5 П—2

Диагонали ромба $ABCD$ равны 16 и 12. Через точку пересечения диагоналей $O$ проведена высота ромба $FE$ ($E \in BC$, $F \in AD$). Через точки $E$ и $F$ проведены прямые, параллельные $AC$, до пересечения со сторонами $AB$ и $CD$ в точках $M$ и $K$ соответственно.

1) Докажите, что $MEKF$ — прямоугольник.

2) Найдите диагонали этого прямоугольника.

3) С помощью микрокалькулятора найдите острый угол ромба.

4) Найдите площадь прямоугольника.

## ВАРИАНТ 6 П—2

$ABCD$ — параллелограмм, $AB = 5$, $AD = 8$. Высота параллелограмма равна 4. На стороне $BC$ выбрана точка $E$.

1) Найдите $BE$ так, чтобы трапеция $ABED$ была равнобедренной.

2) Докажите, что в эту трапецию можно вписать окружность, и найдите площадь вписанного в эту трапецию круга.

3) Найдите диагонали параллелограмма.

4) С помощью микрокалькулятора найдите острый угол между его диагоналями.

## ВАРИАНТ 1 П—3

Треугольник $ABC$ вписан в окружность, $\angle C = 45°$. Из точки $M$, расположенной вне круга, проведены касательные $MP$ и $MT$, касающиеся окружности в точках $A$ и $B$ соответственно ($P—A—M$, $T—B—M$), $MA + MB = 20$, $BC = 5$.

1) Докажите, что $OAMB$ — квадрат, где $O$ — центр окружности.

2) Найдите сторону $AB$.

3) Докажите, что $\angle CBT = \angle CAB$.

4) Найдите градусные меры дуг $BC$ и $CA$.

## ВАРИАНТ 2 П—3

$AB$ — диаметр окружности с центром в точке $O$, хорда $EF$ пересекает диаметр в точке $K$ ($A—K—O$), $EK = 4$, $KF = 6$, $OK = 5$.

1) Найдите радиус окружности.
2) Найдите расстояние от точки $O$ до хорды $BF$.
3) Найдите острый угол между $AB$ и хордой $EF$.
4) Чему равна хорда $FM$, если хорда $EM \parallel AB$?

## ВАРИАНТ 3 П—3

Точка $M$ находится вне круга с центром $O$. Из точки $M$ проведены три секущие: первая секущая пересекает окружность в точках $B$ и $A$ ($M—B—A$), вторая — в точках $D$ и $C$ ($M—D—C$), а третья — в точках $F$ и $E$ ($M—F—E$) и проходит через центр окружности, $AB = 4$, $BM = 5$, $FM = 3$.

1) Докажите, что если $AB = CD$, то $\angle AME = \angle CME$.
2) Найдите радиус окружности.
3) Найдите длину касательной, проведенной из точки $M$ к окружности.
4) Найдите величину угла $AEB$.

## ВАРИАНТ 4 П—3

Остроугольный треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром $O$, $BE$ — диаметр этой окружности, $BC = 4\sqrt{3}$. Сторона $BC$ удалена от центра окружности на расстояние, равное 2, $BN \perp AC$, $BN = 5$.

1) Докажите, что $\angle EBC = \angle ABN$.
2) Найдите радиус окружности.
3) Найдите $AB$.
4) Найдите градусную меру дуги $AB$.

## ВАРИАНТ 5 П—3

В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. В этот треугольник вписана окружность, которая касается сторон $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно в точках $D$, $E$ и $F$. На дуге $DF$ выбрана точка $K$ и проведена касательная к окружности в этой точке. Касательная пересекает $AB$ в точке $P$, а $AC$ — в точке $T$.

1) В каком отношении точки $D$, $E$ и $F$ делят окружность?
2) Найдите радиус окружности, если ее центр удален от вершины $C$ на расстояние, равное $4\sqrt{2}$.
3) Найдите периметр треугольника $APT$.
4) Найдите радиус окружности, описанный около треугольника $ABC$.

## ВАРИАНТ 6 П—3

$AB$ — диаметр окружности с центром в точке $O$. Радиус этой окружности равен 4, $O_1$ — середина $OA$. С центром в точке $O_1$ проведена окружность, касающаяся большей окружности в точке $A$. Хорда $CD$ большей окружности перпендикулярна $AB$ и пересекает $AB$ в точке $K$. $E$ и $F$ — точки пересечения $CD$ с меньшей окружностью ($C—E—K—F—D$), $AK = 3$.

1) Найдите длины хорд $AE$ и $AC$.

2) Найдите градусную меру дуги $AF$ и ее длину.

3) Найдите площадь части меньшего круга, отсеченной хордой $EF$.

4) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ACE$.

## ВАРИАНТ 1 П—4

$ABCD$ — параллелограмм, $A\,(1;\,-2)$, $B\,(2;\,4)$, $C\,(-1;\,5)$.

1) Найдите координаты вершины $D$.

2) Точка $E$ принадлежит $CD$, причем $CE = 2DE$. Разложите вектор $\overrightarrow{EB}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3) Найдите угол $A$.

4) Напишите уравнение прямой $AC$ и уравнение окружности с диаметром, равным $AC$.

## ВАРИАНТ 2 П—4

Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(-6;\,10)$; $B(8;\,8)$, $C(2;\,2)$.

1) Определите вид этого треугольника.

2) Медианы $AA_1$ и $BB_1$ треугольника пересекаются в точке $M$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

3) Найдите острый угол между этими медианами.

4) Напишите уравнение прямой $AA_1$ и уравнение описанной около этого треугольника окружности.

## ВАРИАНТ 3 П—4

Трапеция $ABCD$ задана координатами своих вершин: $A(-1;\,0)$, $B(-1;\,3)$, $C(4;\,6)$, $D(4;\,0)$, $M$ — середина $BC$.

1) Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

2) Найдите координаты точки $H$ пересечения прямых $AC$ и $BD$.

3) Разложите вектор $\overrightarrow{AH}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

4) Найдите острый угол между прямыми $AM$ и $BD$ и площадь четырехугольника $ABMD$.

## ВАРИАНТ 4 П—4

Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(0; 12)$, $B(9; 0)$, $C(0; -12)$, $O$ — центр вписанной в треугольник окружности.

1) Найдите длину медианы $CM$ этого треугольника.

2) Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности и уравнение этой окружности.

3) Найдите угол между прямыми $AO$ и $BC$.

4) Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$.

## ВАРИАНТ 5 П—4

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(8; 7)$, $D(5; 0)$.

1) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

2) Вычислите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3) Найдите углы ромба.

4) Напишите уравнение окружности, вписанной в ромб.

## ВАРИАНТ 6 П—4

Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(2; -1)$, $B(2; 2)$, $C(-3; 5)$, $M \in AC$, причем $AM : MC = 1 : 3$.

1) Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

2) Найдите координаты точки $K$ пересечения медиан этого треугольника.

3) Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\overrightarrow{AC}$, длина которого равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$.

4) Найдите угол между вектором $\overrightarrow{AC}$ и осью абсцисс.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

## МД—1

### ВАРИАНТ 1

1. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, $x\vec{a}+y\vec{b}=-3\vec{a}$. Найдите $x$ и $y$.
2. Запишите координаты вектора $\vec{m}=-3\vec{i}+2\vec{j}$.
3. Среди векторов $\vec{a}\,\{-4;\ 5\}$, $\vec{b}\,\{-8;\ 10\}$, $\vec{c}\,\{2;\ -2{,}5\}$ укажите пару коллинеарных векторов.
4. $\vec{a}\,\{3;\ -2\}$, $\vec{b}\,\{-2;\ 3\}$, $\vec{c}\,\{-1;\ 1\}$. Чему равен угол между лучами, задающими векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$?
5. Найдите расстояние между точками $A(a;\ 0)$ и $B(b;\ 0)$.
6. $E(-2;\ 3)$, $F(1;\ 2)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{EF}$ и его длину.
7. $AB$ — диаметр окружности, $A(1;\ -5)$, $B(3;\ 1)$. Найдите координаты центра окружности.
8. Напишите уравнение окружности с центром в точке $C(-4;\ 3)$ и радиусом $R=5$.
9. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y=x-2$, $y=-x-2$, $y=0$.
10. $x^2+y^2=4$, $y=a$. При каких значениях $a$ эти линии имеют две общие точки?

### ВАРИАНТ 2

1. $\vec{m}$ и $\vec{n}$ — неколлинеарные векторы, $x\vec{m}+y\vec{n}=5\vec{n}$. Найдите $x$ и $y$.
2. Запишите разложение вектора $\vec{k}\,\{5;\ -2\}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.
3. Среди векторов $\vec{c}\left\{\frac{1}{2};\ -4\right\}$, $\vec{m}\,\{-1;\ 8\}$, $\vec{n}\,\{0{,}25;\ 2\}$ укажите пару коллинеарных векторов.
4. $\vec{a}\,\{2;\ -3\}$, $\vec{b}\,\{1;\ -2\}$, $\vec{c}\,\{1;\ 1\}$. Чему равен угол между лучами, задающими векторы $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$?
5. Найдите расстояние между точками $E(0;\ m)$ и $F(0;\ n)$.
6. $F(1;\ -4)$, $M(3;\ 1)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{FM}$ и его длину.
7. $EK$ — диагональ параллелограмма $EFKD$, $E(-4;\ 3)$, $K(2;\ 5)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.
8. Напишите уравнение окружности с центром в точке $M(2;\ -4)$ и радиусом $R=3$.

9. Найдите площадь треугольника, ограниченного линиями $y = x - 3$, $y = -x + 3$ и $x = 0$.
10. $x^2 + y^2 = 16$, $x = m$. При каких значениях $m$ эти линии не имеют общих точек?

**МД—2**

### ВАРИАНТ 1

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle A = 20°$, $\angle C = 10°$. Найдите площадь треугольника.
2. Сторона ромба равна 2 см, а его площадь — 2 см$^2$. Найдите острый угол ромба.
3. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$. Найдите отношение сторон $\frac{BC}{AC}$.
4. В треугольнике $ABC$ $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle C = 45°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
5. Стороны треугольника равны 4, 7, 8. Как по отношению к нему расположен центр описанной окружности?
6. $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 70°$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$.
7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1. Найдите:
   1) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$.
8. $\vec{a}\,\{2; -3\}$, $\vec{b}\,\{1; 1\}$. Какой угол (острый, прямой или тупой) между этими векторами?
9. Треугольник $ABC$ прямоугольный, $\angle C = 90°$. Вычислите
$$(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$
10. $\vec{e}\,\{x; y\}$, $|\vec{e}| = 1$. Угол между вектором $\vec{e}$ и положительным направлением оси $Ox$ равен $\alpha$. Найдите $x$.

### ВАРИАНТ 2

1. В треугольнике $MEK$ $ME = \sqrt{3}$, $EK = 2$. Внешний угол при вершине $E$ равен 120°. Найдите площадь треугольника.
2. Стороны параллелограмма равны 1 см и $\sqrt{3}$ см, а его площадь $\frac{3}{2}$ см$^2$. Найдите острый угол параллелограмма.
3. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$. Найдите отношение сторон $\frac{BC}{AB}$.
4. В треугольнике $EHF$ $\angle H = 60°$. Радиус описанной около треугольника окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону $EF$.
5. Стороны треугольника равны 4, 6, 9. Как по отношению к этому треугольнику располагается центр описанной около него окружности?

6. $\widehat{\vec{m}\vec{n}} = 130°$. Найдите угол между векторами $-\frac{1}{2}\vec{m}$ и $5\vec{n}$.
7. Сторона ромба $ABCD$ равна 1. Найдите:
   1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$;  2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$;  3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
8. $\vec{m}\ \{2; -1\}$, $\vec{n}\ \{3; 2\}$. Какой угол (острый, прямой или тупой) между этими векторами?
9. $ABCD$ — прямоугольник. Вычислите $(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$.
10. $\vec{e}\ \{x;\ y\}$, $|\vec{e}| = 1$. Угол между вектором $\vec{e}$ и положительным направлением оси $Oy$ равен $\beta$. Найдите $y$.

## МД—3 ВАРИАНТ 1

1. Сторона правильного $n$-угольника стягивает дугу, равную $\alpha$. Чему равен внешний угол этого многоугольника?
2. Угол правильного $n$-угольника равен $160°$. Найдите $n$.
3. В окружность радиуса $R$ вписан треугольник, две стороны которого равны $R$ и $R\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.
4. Найдите отношение сторон правильного вписанного шестиугольника и описанного квадрата около одной и той же окружности.
5. В окружность, радиус которой равен $R$, вписан правильный 12-угольник. Чему равна его площадь?
6. Длина окружности увеличилась на 1 м. На сколько при этом увеличился радиус окружности?
7. Длина окружности равна $6\pi$. Ее дуга, содержащая $120°$, свернута в окружность. Чему равен радиус окружности?
8. Один из углов ромба равен $30°$. Найдите отношение длины вписанной в ромб окружности к его периметру.
9. Радиусы двух концентрических окружностей равны 1 и 3. Как относится площадь кольца к площади меньшего круга?
10. Площадь сектора с углом $30°$ равна $3\pi$. Найдите радиус сектора.

## ВАРИАНТ 2

1. Внешний угол правильного $n$-угольника равен $\beta$. Найдите величину дуги, которая стягивается стороной этого многоугольника.
2. Угол правильного $n$-угольника равен $140°$. Найдите $n$.
3. В окружность радиуса $R$ вписан треугольник, две стороны которого равны по $R\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника.
4. Найдите отношение сторон правильного вписанного треугольника и описанного квадрата около одной и той же окружности.

5. В окружность, радиус которой равен $R$, вписан правильный 8-угольник. Чему равна его площадь?
6. Радиус окружности увеличился на 1 м. На сколько при этом увеличилась длина окружности?
7. Длина окружности равна $8\pi$. Ее дуга, содержащая $90°$, свернута в окружность. Чему равен радиус этой окружности?
8. В равнобедренную трапецию с углом $30°$ вписана окружность. Найдите отношение длины этой окружности к периметру трапеции.
9. Радиусы двух концентрических окружностей равны 2 и 5. Как относится площадь кольца к площади большего круга?
10. Площадь сектора с углом $20°$ равна $2\pi$. Найдите радиус сектора.

## МД—4 ВАРИАНТ 1

1. $a \parallel b$. При некотором движении $a \to a_1$ и $b \to b_1$. Каково взаимное положение прямых $a_1$ и $b_1$?
2. Назовите четырехугольник, который имеет только одну ось симметрии.
3. Прямые $y = 3x + b$ и $y = kx + 4$ симметричны относительно начала координат. Найдите $k$ и $b$.
4. Фигура состоит из трех прямых, из которых две параллельные, а третья пересекает первые две. Имеет ли эта фигура центр симметрии?
5. Параллельный перенос задан парой точек $O(0;\ 0) \to M(-2;\ 0)$. Запишите координаты образа точки $B(4;\ 1)$.
6. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона квадрата отображается на другую его сторону?
7. При некотором параллельном переносе квадрат $ABCD$ отображается на квадрат $A_1B_1C_1D_1$, при этом общей частью квадрата и его образа тоже является квадрат. Укажите направление параллельного переноса.
8. Начертите прямую $a$ и отметьте точку $O$ вне ее. Постройте образ прямой $a$ при повороте вокруг точки $O$ на $45°$ против часовой стрелки.
9. Прямоугольник $ABCD$ при повороте на $170°$ против часовой стрелки вокруг центра $D$ отображается на прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$, $AC \to A_1C_1$. Чему равен острый угол между этими прямыми?
10. Даны две прямые $x = 3$ и $y = 2$. Укажите координаты точки на оси $Ox$, при повороте вокруг которой одна прямая отображается на другую.

## ВАРИАНТ 2

1. Прямые $a$ и $b$ пересекаются под углом $\alpha$. При некотором движении $a \to a_1$ и $b \to b_1$. Чему равен угол между прямыми $a_1$ и $b_1$?
2. Назовите треугольник, который имеет более одной оси симметрии.
3. Прямые $y = -2x + b$ и $y = kx + 1$ симметричны относительно начала координат. Найдите $k$ и $b$.
4. Какие правильные многоугольники имеют центр симметрии?
5. Параллельный перенос задан парой точек $O(0;\ 0) \to$ $\to P(3;\ 0)$. Запишите координаты образа точки $T(-2;\ 5)$.
6. Существует ли параллельный перенос, при котором одна сторона треугольника отображается на другую его сторону?
7. При некотором параллельном переносе параллелограмм $ABCD$ отображается на параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Общая часть этих параллелограммов есть некоторый четырехугольник. Определите его вид.
8. Начертите прямую $b$ и отметьте точку $O$ вне ее. Постройте образ прямой $b$ при повороте вокруг точки $O$ на $60°$ по часовой стрелке.
9. Параллелограмм $ABCD$ при повороте на $160°$ по часовой стрелке вокруг центра $A$ отображается на параллелограмм $AB_1C_1D_1$, $BD \to B_1D_1$. Чему равен острый угол между прямыми $BD$ и $B_1D_1$?
10. Даны две прямые $x = 3$ и $y = 2$. Укажите координаты точки на оси $Oy$, при повороте вокруг которой одна прямая отображается на другую.

## МД—5 ВАРИАНТ 1

1. В треугольнике $ABC$ $\angle B = 20°$. Биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $AOC$.
2. В трапеции $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) $AC$ — биссектриса угла $A$, $AB = 6$, $AD = 10$. Найдите среднюю линию трапеции.
3. В треугольнике $ABC$ точка $E$ принадлежит стороне $AC$. $\angle ABC = \angle BEC$, $AC = 5$, $BC = 3$. Найдите отношение площадей треугольников $BEC$ и $ABC$.
4. В трапеции $ABCD$ $AC = 4$, $AD = 8$, $\angle CAD = 30°$. Найдите площадь треугольника $ABD$.
5. В равнобедренном треугольнике основание равно 8. Высота, опущенная на основание, равна 3. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

6. В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD \perp AB$, $AD = 2$, $AB = 8$. Найдите $AC$.
7. Угол $AMB$ — вписанный в окружность с центром $O$, $\angle AMB = 30°$. Радиус окружности равен 5. Найдите периметр треугольника $AOB$.
8. Из точки $M$, удаленной от центра окружности $O$ на расстояние, равное 10, проведены касательные $MA$ и $MB$ ($A$ и $B$ — точки касания), $\angle AMB = 120°$. Найдите $MA + MB$.
9. Точка $M$, расположенная вне окружности, соединена отрезком с концами диаметра $AB$, $MA$ пересекает окружность в точке $E$, $AE = 3$, $ME = 2$. Радиус окружности равен 2,5. Найдите площадь треугольника $AMB$.
10. Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$, $MD = 4$, $MC = 5$, $AM = 2$. Какая из хорд расположена ближе к центру?

## ВАРИАНТ 2

1. В треугольнике $ABC$ биссектрисы $AA_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $O$, $\angle AOC = 140°$. Найдите угол $B$.
2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = 90°$, $AD$ и $BC$ — основания) $DB$ — биссектриса угла $D$, $CD = 5$, $AB = 4$. Найдите среднюю линию трапеции.
3. В треугольнике $ABC$ точка $K$ принадлежит стороне $AB$, $\angle BCK = \angle BAC$, $BK = 4$, $BC = 7$. Найдите отношение периметров треугольников $BKC$ и $ABC$.
4. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 10$, $AD = 6$, $\angle BDA = 30°$. Найдите площадь треугольника $ACD$.
5. Диагонали ромба равны 6 и 8. Найдите его высоту.
6. В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD \perp AB$, $AD = 2$, $DB = 8$. Найдите $CD$.
7. Угол $AMB$ вписан в окружность с центром $O$, $\angle AMB = 45°$. Радиус окружности равен 2. Найдите длину хорды $AB$.
8. Из точки $M$, расположенной вне окружности, проведены касательные $MA$ и $MB$ ($A$ и $B$ — точки касания). $\angle AMB = 90°$, $AB = 10$. Найдите расстояние от точки $M$ до центра окружности $O$.
9. Из точки $M$ проведена касательная $MA$ к окружности ($A$ — точка касания), $AC$ — диаметр окружности, $MC$ пересекает окружность в точке $E$, $MA = 5$. Радиус окружности равен 6. Найдите $AE$.
10. Хорды $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$, $AM = 5$, $MB = 8$, $CM = 4$. Какая из хорд расположена дальше от центра?

# КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

---

**К—1** **Вариант 1**

**1.** Даны точки $A(1; -2)$, $B(2; 4)$, $C(-1; 4)$, $D(1; 16)$.

1) Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2) Докажите, что $AB \parallel CD$.

3) Напишите уравнение прямой $AD$.

**2.** Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(-4; 1)$, $B(0; 1)$, $C(-2; 4)$.

1) Докажите, что $\angle A = \angle B$.

2) Найдите длину высоты $CD$ треугольника $ABC$.

**3.** Сколько общих точек имеют линии, заданные уравнениями $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ и $y = -2$?

**4*.** Даны векторы $\vec{a}\{-4; 3\}$, $\vec{b}\{1; -4\}$, $\vec{c}\{6; 2\}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

---

**К—1** **Вариант 2**

**1.** $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

1) Найдите координаты точки $A$, если $B(-1; 4)$.

2) Найдите координаты середины отрезка $AB$.

3) Напишите уравнение прямой $AB$.

**2.** Даны точки $A(-3; 4)$, $B(2; 1)$, $C(-1; a)$. Известно, что $AB = BC$. Найдите $a$.

**3.** Радиус окружности равен 6. Центр окружности принадлежит оси $Ox$ и имеет положительную абсциссу. Окружность проходит через точку $(5; 0)$. Напишите уравнение окружности.

**4*.** Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}\{-1; 2\}$ и имеет длину вектора $\vec{c}\{-3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

---

**К—1** **Вариант 3**

**1.** Даны точки $E(-1; 4)$, $M(2; -3)$, $F(1; -3)$ и $K(4; 4)$.

1) Разложите вектор $\overrightarrow{EM}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

2) Докажите, что $EM$ пересекает $FK$.

3) Напишите уравнение прямой $MF$.

**2.** Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.

1) Найдите координаты середины $D$ стороны $BC$.

2) Докажите, что $AD \perp BC$.

**3.** Сколько общих точек имеют линии, заданные уравнениями $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ и $x = -3$?

**4*.** Даны векторы $\vec{m}\ \{-4; 5\}$, $\vec{n}\ \{-7; 1\}$, $\vec{l}\ \{6; 8\}$. Разложите вектор $\vec{l}$ по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

---

**К—1** **Вариант 4**

**1.** $\overrightarrow{EF} = 6\vec{i} - 6\vec{j}$.

1) Найдите координаты точки $F$, если $E\ (-2; 1)$.

2) Найдите координаты середины отрезка $EF$.

3) Напишите уравнение прямой $EF$.

**2.** Даны точки $C(m; 3)$, $D(4; 1)$, $F(2; 4)$. Известно, что $CD = DF$. Найдите $m$.

**3.** Радиус окружности равен 4. Центр окружности принадлежит оси $Oy$ и имеет отрицательную ординату. Окружность проходит через точку $(0; -2)$. Напишите уравнение окружности.

**4*.** Вектор $\vec{m}$ противоположно направлен вектору $\vec{b}\ \{-2; 4\}$ и имеет длину вектора $\vec{a}\ \{2; 2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$.

---

**К—2** **Вариант 1**

**1.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 40°$, $\angle C = 75°$, $BC = 17$. Найдите неизвестные элементы треугольника и радиус описанной около него окружности.

**2.** В треугольнике $PKH$ $PK = 6$, $KH = 5$, $\angle PKH = 100°$, $HF$ — медиана. Найдите $HF$ и площадь треугольника $PFH$.

**3*.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $\angle BAC = 2\alpha$, $AE$ — биссектриса, $BE = a$. Найдите площадь треугольника $ABC$.

---

**К—2** **Вариант 2**

1. В треугольнике $ABC$ $AB = 4$, $BC = 5$, $\angle B = 110°$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2. В параллелограмме $ABCD$ $E$ — середина $BC$, $AB = 5$, $\angle EAD = 30°$, $\angle ABC = 100°$. Найдите площадь параллелограмма и радиус описанной около треугольника $ABE$ окружности.

3*. Площадь треугольника $PKT$ равна $S$, $\angle P = \alpha$, $\angle T = \beta$. Найдите сторону $PK$.

**К—2** **Вариант 3**

1. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 20°$, $\angle C = 50°$, $AC = 15$. Найдите неизвестные элементы треугольника и радиус описанной около него окружности.

2. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 5$, $BD = 6$. Найдите $\angle CBD$ и площадь параллелограмма.

3*. В ромбе $ABCD$ $AP$ — биссектриса треугольника $CAD$. $\angle BAD = 2\alpha$, $PD = a$. Найдите площадь ромба.

**К—2** **Вариант 4**

1. В треугольнике $PKM$ $\angle K = 40°$, $PK = 2$, $KM = 5$. Найдите неизвестные элементы треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AB = BC$, $\angle A = 65°$. Через середину $E$ стороны $AB$ проведена прямая, пересекающая $BC$ в точке $K$, $\angle KEB = 20°$. Найдите площадь треугольника $BEK$ и радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если $BK = 5$.

3*. Площадь треугольника равна $S$ и два угла его равны $\alpha$ и $\beta$. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

**К—3** **Вариант 1**

1. В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AB = BC = 4$, $\angle B = 120°$, $M$ и $N$ — середины $AB$ и $BC$ соответственно. Найдите: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(0; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(-1; 3)$.

1) Найдите острый угол между медианой $AM$ и стороной $AC$.

2) Вычислите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

3*. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b}\,\{1; -3\}$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью $Ox$ острый.

**К—3** **Вариант 2**

**1.** В прямоугольнике $ABCD$ $AC = 6$, $\angle ACD = 60°$. Найдите: 1) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

**2.** Даны точки $A(-1; 4)$, $B(1; -2)$, $C(0; -4)$, $D(2; 2)$, $E$ и $F$ — середины $AB$ и $CD$ соответственно.

1) Найдите острый угол между $EF$ и $CD$.

2) Вычислите $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD}$.

**3*.** В треугольнике $ABC$ $AD$, $BE$ и $CF$ — медианы. Вычислите $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$.

---

**К—3** **Вариант 3**

**1.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 30°$, $AC = 2$, $E$ и $F$ — середины $AB$ и $BC$ соответственно. Найдите: 1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC}$.

**2.** Треугольник $ABC$ задан координатами своих вершин: $A(-1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(1; -3)$.

1) Найдите острый угол между медианой $CF$ и стороной $AC$.

2) Вычислите $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**3*.** Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} \perp \vec{k}$ и $\vec{k}\,\{2; -1\}$, $|\vec{m}| = 2\sqrt{5}$ и угол между вектором $\vec{m}$ и осью $Oy$ тупой.

---

**К—3** **Вариант 4**

**1.** $ABCD$ — ромб, $AB = 6$, $\angle A = 60°$. Найдите: 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$; 3) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.

**2.** Даны два отрезка $EK$ и $PM$, причем $EK \perp PM$, $E(-3; 1)$, $K(1; 4)$, $M(2; 1)$, $P(-4; a)$.

1) Найдите острый угол между $PE$ и $EK$.

2) Вычислите $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KP}$.

**3*.** $ABCD$ — прямоугольник, $M$ — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

## К—4 Вариант 1

**1.** Около правильного шестиугольника описана окружность и в него вписана окружность. Длина большей окружности равна $4\pi$. Найдите площадь кольца и площадь шестиугольника.

**2.** Хорда окружности равна $5\sqrt{2}$ и стягивает дугу в $90°$. Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.

**3.** На рисунке 56 хорды $AB$ и $AC$ стягивают дуги в $60°$ и $120°$. Радиус окружности равен $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

**4*.** Докажите, что в правильном многоугольнике сумма длин перпендикуляров, проведенных из точки, взятой внутри этого многоугольника, на все его стороны, равна радиусу вписанной в этот многоугольник окружности, умноженному на число сторон.

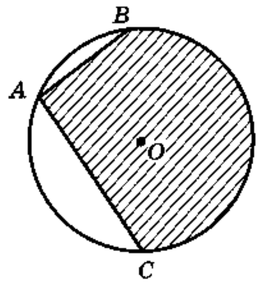


Рис. 56

## К—4 Вариант 2

**1.** Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Длина меньшей окружности равна $8\pi$. Найдите площадь кольца и площадь треугольника.

**2.** Хорда окружности равна 6 и стягивает дугу в $60°$. Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.

**3.** На рисунке 57 хорды $CD$ и $CH$ стягивают дуги в $90°$. Радиус окружности равен $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

**4*.** На сторонах правильного 8-угольника $A_1A_2...A_8$ вне его построены квадраты. Докажите, что многоугольник, образованный вершинами этих квадратов, отличных от $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_8$, не является правильным.

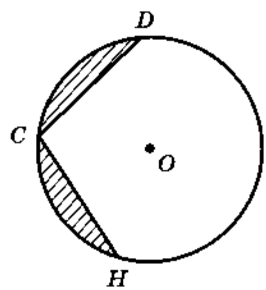


Рис. 57

## К—4 Вариант 3

1. В квадрат вписана окружность и около него описана окружность. Длина большей окружности равна $8\pi$. Найдите площадь кольца и площадь квадрата.

2. Хорда окружности равна 12 и стягивает дугу в $120°$. Найдите длину дуги и площадь соответствующего сектора.

3. На рисунке 58 хорды $MK$ и $MT$ стягивают дуги в $60°$ и $120°$. Радиус окружности равен $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

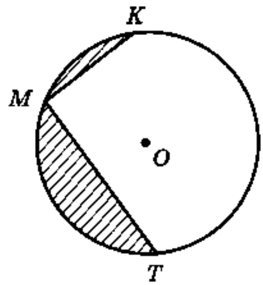

Рис. 58

4*. Докажите, что площадь правильного $2n$-угольника равна $\frac{na_nR}{2}$, где $R$ — радиус описанной окружности, $a_n$ — сторона правильного $n$-угольника, вписанного в ту же окружность.

## К—4 Вариант 4

1. Около правильного треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Сторона треугольника равна 4. Найдите площадь кольца и длину меньшей окружности.

2. Хорда стягивает дугу в $60°$. Длина дуги равна $2\pi$. Найдите длину хорды и площадь соответствующего сектора.

3. На рисунке 59 хорды $EF$ и $EK$ стягивают дуги в $90°$. Радиус окружности равен $R$. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

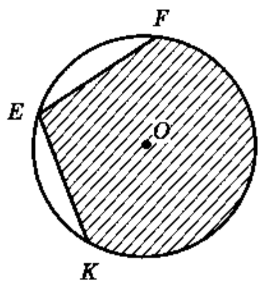

Рис. 59

4*. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Стороны $FA$, $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ и $EF$ продолжены за вершины $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$ на равные отрезки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$, $EE_1$ и $FF_1$. Докажите, что $A_1B_1D_1C_1E_1F_1$ — правильный шестиугольник.

## К—5 Вариант 1

**1.** 1) Начертите квадрат $ABCD$ и отметьте на диагонали точку $M$, не совпадающую с точкой пересечения диагоналей. Постройте образ этого квадрата при переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$.

2) Дан прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle C = 90°$). Постройте его образ при повороте вокруг центра $C$ на 90° по часовой стрелке. Чему равен угол между $AB$ и $A_1B_1$, если $AB \to A_1B_1$?

**2.** Каким условиям должны удовлетворять два угла, чтобы один из них можно было получить из другого при помощи параллельного переноса?

**3.** Докажите, что прямая, содержащая середины двух параллельных хорд окружности, проходит через ее центр.

**4*.** Начертите два непараллельных отрезка $AB$ и $CD$, длины которых равны. Постройте центр поворота, отображающего отрезок $AB$ на $CD$ ($A \to C$; $B \to D$).

## К—5 Вариант 2

**1.** 1) Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте на стороне $BC$ произвольную точку $M$. Постройте образ этого параллелограмма при переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$.

2) Начертите произвольный треугольник $ABC$ и постройте его образ при повороте вокруг центра $C$ на 60° против часовой стрелки. Чему будет равен угол между $AB$ и $A_1B_1$, если $AB \to A_1B_1$?

**2.** Дан угол $AOB$, $OC$ — биссектриса этого угла, $M \in OA$ и $K \in OB$, причем $OM = OK$. Докажите, что точки $M$ и $K$ симметричны относительно прямой $OC$.

**3.** Даны две точки $A(-5;\ 3)$ и $B(3;\ 5)$. Докажите, что точка $B$ может быть получена из точки $A$ поворотом вокруг начала координат на 90° по часовой стрелке.

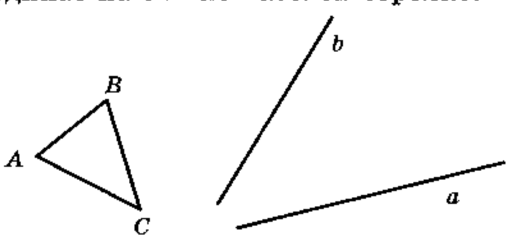


Рис. 60

**4*.** Постройте треугольник, равный данному, так, чтобы основание его принадлежало данной прямой $a$, а вершина — данной прямой $b$ (рис. 60).

К—5 Вариант 3

**1.** 1) Начертите трапецию $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания) и отметьте на диагонали $BD$ точку $M$. Постройте образ этой трапеции при переносе на вектор $\overrightarrow{MD}$.

2) Начертите прямоугольник $ABCD$ и постройте его образ при повороте вокруг центра $A$ на 90° по часовой стрелке. Чему будет равен угол между $BD$ и $B_1D_1$, если $B \to B_1$ и $D \to D_1$?

**2.** Каким условиям должны удовлетворять два угла, чтобы один из них можно было получить из другого при помощи центральной симметрии?

**3.** Отрезок $AB$ отображается параллельным переносом на отрезок $A_1B_1$, который другим параллельным переносом отображается на отрезок $A_2B_2$. Можно ли отрезок $AB$ отобразить на $A_2B_2$ одним параллельным переносом? Сделайте рисунок и укажите соответствующий вектор.

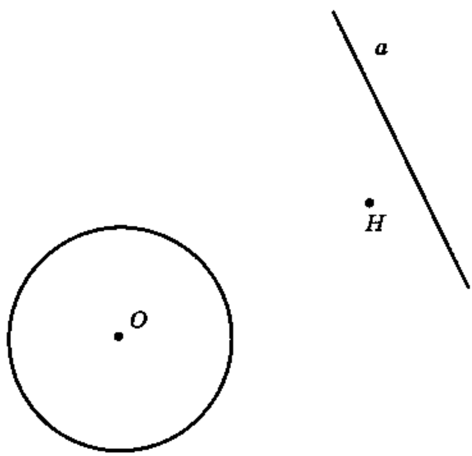


Рис. 61

**4*.** На данных окружности и прямой найдите такие пары точек, что одна точка является образом другой при повороте вокруг данной точки $H$ на 60° (рис. 61).

## К—5 Вариант 4

**1.** 1) Начертите прямоугольную трапецию $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания, $\angle A = 90°$) и отметьте на стороне $CD$ точку $P$. Постройте образ этой трапеции при переносе на вектор $\overrightarrow{PA}$.

2) Начертите правильный треугольник $ABC$ и постройте его образ при повороте вокруг середины $AC$ на угол 60° по часовой стрелке. Чему будет равен угол между $AB$ и $A_1B_1$, если $AB \to A_1B_1$?

**2.** Докажите, что любая прямая, проходящая через центр параллелограмма, делит его на две равные фигуры.

**3.** Даны две точки $A(-2; -2\sqrt{3})$ и $B(2\sqrt{3}; 2)$. Докажите, что точка $B$ может быть получена из точки $A$ поворотом вокруг начала координат на 150° против часовой стрелки.

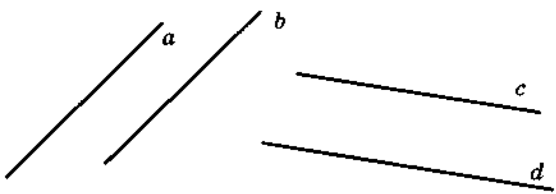


Рис. 62

**4*.** На рисунке 62 $a \parallel b$ и $c \parallel d$. Укажите такой вектор, что при параллельном переносе на этот вектор $a \to b$ и $c \to d$.

## К—6 Вариант 1

В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD \perp AB$, $AC = 3$ см, $CD = 2{,}4$ см.

1) Докажите подобие треугольников $ABC$ и $ADC$ и найдите неизвестные стороны треугольника $ABC$ и его площадь.

2) Найдите площадь вписанного в треугольник круга.

3) Найдите отношение длин окружностей, описанных около треугольников $ADC$ и $BDC$.

4) Разложите вектор $\overrightarrow{CD}$ по векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5) Вычислите $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$.

**К—6** **Вариант 2**

В параллелограмме $ABCD$ $AD = 12$ см, $AB = 6$ см, $\angle BAD = 60°$. Биссектриса угла $D$ пересекает $BC$ в точке $E$.

1) Найдите высоты параллелограмма и его площадь.

2) Определите вид треугольника $ECD$ и найдите длину описанной около треугольника окружности.

3) Найдите длину большей диагонали параллелограмма.

4) Разложите вектор $\overrightarrow{DE}$ по векторам $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5) Вычислите $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD})$.

**К—6** **Вариант 3**

В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD$ и $BC$ равны соответственно 10 см и 6 см, $\angle A = 30°$.

1) Найдите высоту $BE$ и площадь трапеции.

2) Докажите подобие треугольников $AOD$ и $BOC$ и найдите отношение их площадей, если $O$ — точка пересечения диагоналей трапеции.

3) Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

4) Разложите вектор $\overrightarrow{BE}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$.

5) Вычислите $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})$.

**К—6** **Вариант 4**

В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AB = BC = 5$ см, $AC = 6$ см, $BD$ и $AK$ — высоты.

1) Найдите площадь треугольника $ABC$ и $\sin \angle ABC$.

2) Докажите, что треугольники $AKC$ и $BDC$ подобны, и найдите длину $CK$.

3) Найдите длину окружности, описанной около треугольника $ABC$.

4) Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$.

5) Вычислите $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC}$.

## ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, делит его сторону $AB$ на отрезки $AD$ и $DB$, равные 5 и 3 соответственно; $\angle A = 60°$. Найдите длину $BC$.
2. В прямой угол вписана окружность единичного радиуса. Вторая окружность также вписана в тот же угол, касается первой окружности и имеет меньший радиус. Найдите радиус второй окружности.
3. На одной стороне угла с вершиной $O$ отложены равные отрезки $OA = AB = BC$, а на другой стороне — равные отрезки $OD = DE = EF$. Докажите, что треугольники $AEC$ и $DBF$ равновелики.
4. Длины всех сторон четырехугольника меньше 1. Докажите, что его площадь тоже меньше 1.
5. Точки $E$ и $F$ лежат на сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$. $AF$ пересекает $CE$ в точке $P$. Докажите, что площадь треугольника $EPF$ меньше среднего геометрического площадей треугольников $AEP$ и $FCP$.
6. Докажите, что для любого треугольника справедливо равенство
$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$
7. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $BC = 7$. Биссектрисы внутренних углов, пересекаясь, образовали четырехугольник. Найдите отношение площади четырехугольника к площади параллелограмма.
8. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 2. Чему равно основание этого треугольника, если известно, что площадь треугольника — целое число?
9. Внутри квадрата $ABCD$ расположена точка $M$; $MA = 7$, $MB = 3$, $MC = 5$. Найдите сторону квадрата.
10. В треугольнике $ABC$ сумма сторон $AB$ и $AC$ равна $a$, $\angle A = 60°$ и длина биссектрисы угла $A$ составляет $\frac{2}{3}$ стороны $BC$. Найдите стороны треугольника.
11. В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AH$ и $CP$. Найдите угол $B$, если $AC = 2HP$.
12. Что больше: сумма квадратов сторон правильного вписанного 16-угольника или сумма квадратов сторон квадрата, вписанного в ту же окружность?
13. Докажите, что разность квадратов длин смежных сторон параллелограмма меньше произведения длин его диагоналей.

14. В равнобедренном треугольнике $ABC$ $AC$ — основание, $BD \perp AC$, $M$ — середина $DE$. Докажите, что $AE \perp BM$.

15. В трапеции $ABCD$ одна из диагоналей равна 4, угол между диагоналями $120°$. Высота трапеции равна 2. Найдите длину второй диагонали.

16. В квадрате $ABCD$ точки $K$, $L$, $M$ и $N$ лежат на сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно. При этом $KM \parallel AD$, а углы $NKL$ и $LMN$ равны $90°$. Докажите, что середина отрезка $LN$ совпадает с центром квадрата $ABCD$.

17. $M$ и $N$ — середины сторон $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если $DM \perp AC$, то $BN : CD = 3 : 2$.

18. Вершины вписанного четырехугольника $ABCD$ находятся в узлах сетки листа бумаги. Известно, что $ABCD$ не трапеция. Докажите, что $|AC \cdot AD - BC \cdot BD| \geqslant 1$.

19. Докажите, что длина медианы, выходящей из вершины тупого угла треугольника, меньше четверти периметра этого треугольника.

20. $AL$ — биссектриса треугольника $ABC$, $K$ — точка на стороне $AC$, такая, что $CK = CL$, $LK$ и биссектриса угла $B$ пересекаются в точке $P$. Докажите, что $AP = PL$.

21. Докажите, что любые три точки на плоскости, попарные расстояния между которыми не превосходят 1, можно заключить в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

22. Точка, лежащая внутри правильного шестиугольника, соединена с его вершинами. Докажите, что из этих отрезков можно составить шестиугольник, площадь которого не менее $\frac{2}{3}$ площади данного шестиугольника.

23. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$, $\angle BAC = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle CDB$. Докажите, что касательные, проведенные к окружности, проходящей через точки $A$, $D$ и $O$, из точек $B$ и $C$, равны.

24. В треугольнике $ABC$ $\angle A = 120°$, $AF$, $BE$ и $CD$ — биссектрисы. Докажите, что угол $EFD$ прямой.

25. Точка $P$ находится вне окружности с центром $O$. Прямые $l_1$ и $l_2$ проходят через точку $P$, причем $l_1$ касается окружности в точке $A$, а $l_2$ пересекает окружность в точках $B$ и $C$. Касательные к окружности в точках $B$ и $C$ пересекаются в точке $X$. Докажите, что $AX \perp PO$.

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

## Самостоятельные работы

### С—1

*Вар.* 1. 1. 1) $k=\frac{2}{5}$; 2) такого числа нет. 2. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$.

*Вар.* 2. 1. 1) $k=-\frac{20}{7}$; 2) такого числа нет. 2. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\vec{m}+\vec{n}$.

*Вар.* 3. 1. 1) $k=3$; 2) $k=-\frac{1}{3}$. 2. $\overrightarrow{DM}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$.

*Вар.* 4. 1. 1) $k=-\frac{2}{3}$; 2) $k=2$. 2. $\overrightarrow{KB}=\frac{3}{7}\vec{n}-\frac{3}{7}\vec{m}$.

*Вар.* 5. 1. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$. Ответ: $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$.

2. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{DE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, то $DE \parallel AC$.

*Вар.* 6. 1. $\overrightarrow{OM}=\frac{10}{7}\vec{m}-\frac{3}{7}\vec{n}$. 2. Задачи решаются аналогично задачам варианта 5.

*Вар.* 7. 1. Пусть $\frac{BO}{OD}=\frac{m}{n}$, $\overrightarrow{AO}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD}=$

$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{2m}{5(m+n)}\overrightarrow{AC}$ (1), $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AE}=\frac{5k}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4k}{9}\overrightarrow{AC}$ (2). Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{n}{m+n}=\frac{5k}{9}$ и $\frac{2m}{5(m+n)}=\frac{4k}{9}$. Отсюда $\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$. Ответ: $\frac{BO}{OD}=\frac{2}{1}$.

2. Пусть продолжения сторон $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Тогда $\overrightarrow{OA}=k_1\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}=k_1\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM}=k_2\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}=k_2\overrightarrow{ON}$.

Отсюда $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{k_2}\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{k_2}\overrightarrow{OD}$. Тогда $\overrightarrow{OA}=\frac{k_1}{k_2}\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}=\frac{k_1}{k_2}\overrightarrow{OC}$;

$\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON}=\frac{k_1}{k_2}(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})=\frac{k_1}{k_2}\overrightarrow{CM}$. Итак, $\overrightarrow{NA}=\frac{k_1}{k_2}\overrightarrow{CM}$, значит, $AN \parallel MC$.

*Вар.* 8. 1. $\frac{EB}{BT}=\frac{8}{21}$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{30}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$. Тогда $\overrightarrow{BN}=5\left(\frac{1}{30}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\right)=$ $=5\overrightarrow{NB}$. Имеем $\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{NB}$. Это означает, что точки $B$, $N$ и $M$ лежат на одной прямой.

## С—2

*Вар.* 1. 1. 1) $\vec{a}\,\{5; -4\}$; 2) $\vec{b}\,\{0; -3\}$. 2. $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}-2\vec{j}$.

3. 1) $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты $\{-1; 4\}$; 2) да, будут.

*Вар.* 2. 1. 1) $\vec{m}\,\{-3; 7\}$; 2) $\vec{p}\,\{-4; 0\}$. 2. $\overrightarrow{OT}=-5\vec{i}-5\vec{j}$.

3. 1) $\{-4; 2\}$; 2) да, будут.

*Вар.* 3. 2. $\overrightarrow{AB}=8\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}=-4\vec{i}+3\vec{j}$.

3. 1) $\vec{m}\,\{-7; -1\}$; 2) сонаправлены.

*Вар.* 4. 2. $\overrightarrow{MP}=-30\vec{j}$, $\overrightarrow{OM}=-8\vec{i}+15\vec{j}$, $\overrightarrow{OP}=-8\vec{i}-15\vec{j}$.

3. 1) $\vec{a}\,\{17; -8\}$; 2) противоположно направлены.

*Вар.* 5. 1. $\{3; -1\}$. 2. $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{4}a\vec{i}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{j}$; $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}a\vec{i}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\vec{j}$.

3. $\vec{m}=-\frac{2}{5}$.

*Вар.* 6. 1. $\{8; -10\}$. 2. $\overrightarrow{AE}=\frac{3m}{4}\vec{i}-\frac{m\sqrt{3}}{4}\vec{j}$, $\overrightarrow{BF}=-\frac{3m}{4}\vec{i}-\frac{m\sqrt{3}}{4}\vec{j}$.

3. $m=0$.

*Вар.* 7. 1. Очевидно, что $\vec{p}\,\{3; 4\}$, $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Так как $\vec{a}\,\{3; -1\}$ и $\vec{b}\,\{1; -2\}$, то $\vec{p}\,\{3x+y; -x-2y\}$. Отсюда следует, что $\begin{cases}3x+y=3\\-x-2y=4.\end{cases}$ Тогда $x=2$, $y=-3$. Ответ: $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

2. $\triangle AMB$ — прямоугольный. Пусть $MK\perp AB$. Тогда легко найти, что $AK=\frac{25}{13}$ и $MK=\frac{60}{13}$. Отсюда $\overrightarrow{AM}=\frac{25}{13}\vec{i}+\frac{60}{13}\vec{j}$.

3. $\{5; -8\}$.

*Вар.* 8. 1. $\vec{a}=-\frac{5}{3}\vec{m}+\frac{1}{3}\vec{p}$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. Находим высоту $AF$ треугольника $ABC$: $AF=\frac{24}{5}$; $FC=$ $=\sqrt{36-\frac{576}{25}}=\frac{18}{5}$. Так как $\triangle AKO\sim\triangle AFC$, то $\frac{AO}{AF}=\frac{KO}{FC}$ и $KO=\frac{9}{4}$, $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}=-3\vec{i}-\frac{9}{4}\vec{j}$. Ответ: $\overrightarrow{KA}=-3\vec{i}-\frac{9}{4}\vec{j}$.

3. $\{-7; -1\}$.

## С—3

*Вар*. 1. **1.** 1) (0; 0), (0; 3), (3; 3), (5; 0); 2) $\left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right)$; 3) 1. **2.** $\sqrt{17}$.

*Вар*. 2. **1.** 1) (0; 0), (0; 4), (−8; 4), (−2; 0); 2) (−4; 2), (−1; 2); 3) 3. **2.** $\sqrt{29}$.

*Вар*. 3. **1.** 1) $A\,(-4; 3)$, $B\,(4; 4)$; 2) $\sqrt{65}$; 3) 3,5.

**2.** $\left(\frac{5+\sqrt{31}}{3}; 0\right)$ или $\left(\frac{5-\sqrt{31}}{3}; 0\right)$.

*Вар*. 4. **1.** 1) $A\,(-8; 8)$; $B\,(8; -6)$; 2) $2\sqrt{113}$; 3) 1.

**2.** $\left(0; \frac{-6-2\sqrt{30}}{3}\right)$ или $\left(0; \frac{-6+2\sqrt{30}}{3}\right)$.

*Вар*. 5. **2.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

*Вар*. 6. **2.** $R = \frac{\sqrt{6}}{3}$. У к а з а н и е. Необходимо доказать, что треугольник $ABC$ равносторонний.

*Вар*. 7. **1.** $C\,(2,5; 4)$. **2.** Нет, не лежат. **3.** $\vec{e}\left\{\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\}$.

*Вар*. 8. **1.** $P(-1; -31)$. **2.** Да, лежат. **3.** $\vec{e}\left\{-\frac{5}{13};\ \frac{12}{13}\right\}$.

## С—4

*Вар*. 1. $\sqrt{109}$. *Вар*. 2. $\sqrt{53}$.

*Вар*. 3. $\sqrt{19}$. *Вар*. 4. $\sqrt{185}$.

*Вар*. 5. Поместим треугольник $ABC$ в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина $C$ совпала с началом координат, а вершины $A$ и $B$ располагались на положительных полуосях $Oy$ и $Ox$ соответственно. Используя свойства биссектрисы угла треугольника, находим $\frac{CM}{MB} = \frac{3}{5}$. Тогда $CM = \frac{3}{2}$ и $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$. Пусть $E$ — середина $AB$. Тогда $E\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$ и $ME = \frac{\sqrt{10}}{2}$. О т в е т: $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

*Вар*. 6. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. У к а з а н и е. Необходимо поместить трапецию в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина $A$ совпадала с началом координат, а вершины $B$ и $D$ располагались на положительных полуосях $Oy$ и $Ox$ соответственно. Из подобия треугольников $BOC$ и $AOD$ находим $C\left(\frac{4}{3}; 4\right)$. Дальнейшее решение очевидно.

*Вар*. 7. Поместим треугольник $ABC$ в прямоугольную систему координат. Пусть $A$ (0; 0); $C$ ($a$; 0) и $B$ ($b$; $h$). Рассмотрим медиану

$BE$ и точку $M$ на ней, такую, что $\frac{BM}{ME} = \frac{2}{1}$. Зная координаты точек $B\ (b;\ h)$ и $E\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, находим координаты точки $M$: $M\left(\frac{a+b}{3};\ \frac{h}{3}\right)$. Рассмотрим теперь медиану $AF$ и точку $M_1$ на ней, такую, что $\frac{AM_1}{M_1F} = \frac{2}{1}$. Зная координаты точек $A\ (0;\ 0)$ и $F\left(\frac{a+b}{2};\ \frac{h}{2}\right)$, находим координаты точки $M_1$: $M_1\left(\frac{a+b}{3};\ \frac{h}{3}\right)$. Отсюда следует, что точки $M$ и $M_1$ совпадают. Аналогично поступаем и с третьей медианой. Этим доказывается, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$.

*Вар.* 8. Поместим прямоугольник $ABCD$ в прямоугольную систему координат. Пусть $A(0;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ b)$ и $D(a;\ 0)$. Рассмотрим на плоскости произвольную точку $M(x;\ y)$. Имеем:

$$MB^2 + MD^2 = x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by, \quad (1)$$

$$MA^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что равенство $MB^2 + MD^2 = MA^2 + MC^2$ не зависит от положения точки $M$.

## С—5

*Вар.* 1. **1.** 1) $C\ (2;\ -4)$, $R = 2\sqrt{5}$; 2) да, проходит.

**2.** 2) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$.

*Вар.* 2. **1.** 1) $C\ (-1;\ 2)$, $R = 2\sqrt{10}$; 2) да, пересекает.

**2.** $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

*Вар.* 3. **2.** $(x+3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$.

*Вар.* 4. **1.** Да, является. **2.** $(x-2)^2 + (y+2\sqrt{3})^2 = 4$.

*Вар.* 5. **1.** Окружности пересекаются. Указание. Необходимо доказать, что расстояние между центрами этих окружностей меньше суммы их радиусов и больше модуля их разности.

**2.** Легко увидеть, что треугольник $ABC$ — равнобедренный, причем $AB = BC = 5$ и $AC = 8$. Неравная высота треугольника равна 3. По этим данным находим радиус вписанной в этот треугольник окружности: $r = \frac{4}{3}$. Находим координаты центра этой окружности $O_1\left(0;\ \frac{1}{3}\right)$. Отсюда уравнение искомой окружности имеет вид $x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

*Вар.* 6. **1.** Окружности касаются. Необходимо доказать, что расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.

**2.** $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+y^2=\frac{625}{64}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 6, при этом радиус описанной вокруг треугольника окружности равен $3\frac{1}{8}$.

*Вар.* 7. **1.** Поместим квадрат $ABCD$ в прямоугольную систему координат так, чтобы центр квадрата совпадал с началом координат. Пусть $A(-a;\ a)$, $B(-a;\ -a)$, $C(a;\ a)$ и $D(a;\ -a)$. Уравнение окружности, вписанной в квадрат, имеет вид $x^2+y^2=a^2$. Выберем на окружности произвольную точку $M$ с координатами $x$ и $y$. Тогда $MA=\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}$, $MB=\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}$, $MC=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$, $MD=\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2}$. Учитывая, что $x^2+y^2=a^2$, имеем $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=12a^2$, где $12a^2$ — величина постоянная. **2.** $(x-5)^2+(y-4)^2=4$.

*Вар.* 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. **2.** $(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

## С—6

*Вар.* 1. **1.** $x=9$. **2.** $y+x-1=0$.

*Вар.* 2. **1.** $y=10$. **2.** $3y-x-14=0$.

*Вар.* 3. **1.** $5y+x-12=0$. **2.** 9 кв. ед.

*Вар.* 4. **1.** $3y-x=0$. **2.** 4 кв. ед.

*Вар.* 5. **1.** Пусть через точку $C(3;\ 4)$ проведена прямая $AB$, перпендикулярная к $OC$, причем точка $A$ принадлежит положительной полуоси $Oy$, а $B$ — положительной полуоси $Ox$. $\triangle OCB$ — прямоугольный ($\angle OCB=90°$). Проведем $CD\perp OB$. Очевидно, что $OD=3$, а $CD=4$. Тогда легко найти длину $OB$: $OB=\frac{25}{3}$ и $B\left(\frac{25}{3};\ 0\right)$. Зная координаты точек $C$ и $B$, можно написать уравнение искомой прямой. Ответ: $3x+4y-25=0$. **2.** $5\frac{1}{3}$ кв. ед.

*Вар.* 6. **1.** $2y-x-2=0$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5. **2.** 10 кв. ед.

*Вар.* 7. **1.** Прямая $y-kx-5=0$ пересекает оси координат в точках $A(0;\ 5)$ и $B\left(-\frac{5}{k};\ 0\right)$, $OA=5$, $OB=\frac{5}{|k|}$. Проведем $OM\perp AB$. $OM$ — расстояние от начала координат до прямой. $OM=\frac{OA\cdot OB}{AB}=$ $=\frac{25}{|k|\sqrt{25+\frac{25}{k^2}}}=\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}$. По условию $\frac{5}{\sqrt{k^2+1}}=3$. Отсюда $k=\pm\frac{4}{3}$.

**2.** $3y+x-5=0$; $C(2;\ 1)$.

*Вар.* 8. **1.** $m = \pm\frac{2}{3\sqrt{5}}$. Указание. Необходимо учесть, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. **2.** $7y + x + 4 = 0$.

## С—7

*Вар.* 1. **1.** Прямая и окружность не имеют общих точек.

**2.** Две окружности с центром в начале координат и с радиусами, равными 7 и 1.

*Вар.* 2. **1.** Окружность и прямая имеют одну общую точку.

**2.** Прямая $x = 4$.

*Вар.* 3. **1.** Прямая и окружность не имеют общих точек.

**2.** Окружность $x^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

*Вар.* 4. **1.** Окружность и прямая имеют одну общую точку.

**2.** Прямая $8y - 6x + 3 = 0$.

*Вар.* 5. **1.** $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Указание. Необходимо найти расстояние от центра окружности (0; 0) до прямой $2y + x - 4 = 0$. Зная радиус окружности и расстояние от ее центра до хорды, легко найти длину хорды.

**2.** Окружность с центром в середине отрезка $AB$ и радиусом, равным 1.

*Вар.* 6. **1.** $x^2 + y^2 = \frac{169}{25}$. Указание. Необходимо найти расстояние от центра окружности (0; 0) до прямой $4y + 3x - 12 = 0$. Зная расстояние от центра окружности до хорды и длину хорды, находим радиус окружности.

**2.** Пусть $A(-2; 0)$ и $B(2; 0)$. Искомым множеством является прямая $x = \frac{1}{2}$.

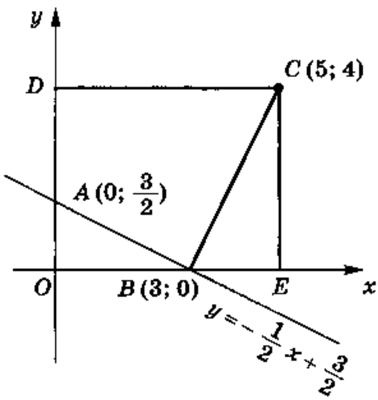

Рис. 63

*Вар.* 7. **1.** Для решения задачи нужно найти расстояние от точки $C(5; 4)$ до прямой $x + 2y - 3 = 0$. На рисунке 63 $BE = 2$, $CE = 4$, $OB = 3$, $OA = \frac{3}{2}$. В таком случае $\triangle CBE \sim \triangle AOB$. Поэтому $\angle ABO + \angle CBE = 90°$. Отсюда $CB \perp AB$ и $CB$ — расстояние от точки $C$ до прямой $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; $CB = \sqrt{16} + 4 = 2\sqrt{5}$. Так как длина хорды равна 8, то $R = \sqrt{20+16} = 6$. Таким образом, уравнение искомой окружности имеет вид $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$.

**2.** Поместим прямоугольный треугольник $ABC$ в прямоугольную систему координат так, чтобы вершина прямого угла $C$ находилась в начале координат, а вершины $A$ и $B$ на положительных полуосях $Oy$ и $Ox$ соответственно. $A(0;\ a)$ и $B(b;\ 0)$. Рассмотрим произвольную точку $M(x;\ y)$, $MA^2 = x^2 + (y-a)^2$, $MC^2 = x^2 + y^2$, $MB^2 = (x-b)^2 + y^2$. По условию $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, а поэтому

$$x^2 + (y-a)^2 + (x-b)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Отсюда $2ay + 2bx = a^2 + b^2$ — уравнение прямой. Ответ: прямая.

*Вар.* 8. **1.** $\frac{4\sqrt{55}}{5}$. В задаче используются идеи, рассмотренные при решении задачи 1 из варианта 7.

**2.** Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7. Если положить $A(0;\ a)$ и $B(b;\ 0)$, то $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2-b^2}{4}$. А это есть уравнение окружности ($b < a\sqrt{3}$). Ответ: окружность.

## С—8

*Вар.* 1. **1.** 1 см$^2$. **2.** 4 см.

*Вар.* 2. **1.** 4. **2.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см$^2$.

*Вар.* 3. **1.** $\frac{18}{7}\sin 2\alpha$. **2.** $20\sqrt{3}$ см$^2$.

*Вар.* 4. **1.** $4\sin\alpha$. **2.** $15\sqrt{2}$ см$^2$.

*Вар.* 5. **1.** $36\sqrt{3}$ см$^2$. **2.** 75°; 105°; 105°; 75°.

*Вар.* 6. **1.** 30° или 150°. **2.** $\frac{1}{2}m^2\sin^2\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

*Вар.* 7. **1.** $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{AO}{OC}$; $\frac{S_{AOD}}{S_{COD}} = \frac{AO}{OC}$. Отсюда

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}};\quad \frac{S_{AOB}}{20} = \frac{60}{40},\quad S_{AOB} = 30.$$

С другой стороны, $S_{AOB} = \frac{1}{2}OA\cdot AB\sin\angle BAO$. Тогда $\sin\angle BAO = \frac{60}{10\cdot 12} = \frac{1}{2}$. В таком случае $\angle BAO = 30°$ или $\angle BAO = 150°$, но второй случай невозможен, так как $\angle AOB > 31°$. Ответ: 30°.

**2.** Пусть $BD = x$. Так как $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC}$, то

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}xa\sin\beta + \frac{1}{2}xb\sin(\alpha-\beta).$$

Отсюда $x = \frac{ab\sin\alpha}{a\sin\beta + b\sin(\alpha-\beta)}$.

*Вар.* 8. **1.** 135°. **2.** $\dfrac{mn\sin\beta}{n\sin(\alpha+\beta)-m\sin\alpha}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

## С—9

*Вар.* 1. **1.** 12. **2.** $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$.

*Вар.* 2. **1.** $\sqrt{2}$. **2.** $\dfrac{h\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$.

*Вар.* 3. **1.** $\dfrac{d^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **2.** 10 см.

*Вар.* 4. **1.** $\dfrac{m^2\sin^2\alpha\cdot\sin2\beta}{2\sin^2(\alpha+\beta)}$. **2.** 6.

*Вар.* 5. **1.** $\dfrac{\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta\ \sin(\alpha+\beta)}$. Необходимо найти отношение $\dfrac{BD}{DC}$, применив теорему синусов для треугольников $ABD$ и $ACD$.

**2.** $\sin A=\dfrac{3}{5}$. $BC=2R\sin A$. В таком случае $R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{9\cdot5}{2\cdot3}=$ $=7{,}5$. Ответ: 7,5.

*Вар.* 6. **1.** $\dfrac{h\sin\beta\cdot\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}{2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha}$. **2.** 8. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

*Вар.* 7. **1.** Из треугольника $ABM$ имеем: $\dfrac{AM}{\sin\angle ABM}=\dfrac{AB}{\sin20^\circ}$, а из треугольника $ACM$: $\dfrac{AM}{\sin\angle ACM}=\dfrac{AC}{\sin30^\circ}$. Учитывая, что $AB=AC$, получим: $\dfrac{\sin\angle ACM}{\sin\angle ABM}=\dfrac{\sin30^\circ}{\sin20^\circ}$ (*). Пусть $\angle MAB=x$. Тогда $\angle ABM=180^\circ-(x+20^\circ)$, $\angle CAM=60^\circ-x$ и $\angle ACM=90^\circ+x$. Из равенства (*) следует, что $\dfrac{\cos x}{\sin(x+20^\circ)}=\dfrac{1}{2\sin20^\circ}$. Далее $\sin(x+20^\circ)=2\sin20^\circ\cos x$; $\sin(x-20^\circ)=0$, $x=20^\circ$. Ответ: 20°.

**2.** $\dfrac{(m^2-n^2)\sin\beta\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}$. Пусть $ABCD$ — трапеция и ее основания $AD$ и $BC$ соответственно равны $m$ и $n$, $\angle BAD=\alpha$, $\angle CDA=\beta$. Необходимо через вершину $B$ провести прямую, параллельную $CD$, до пересечения с $AD$ в точке $E$. После этого рассмотреть треугольник $ABE$, где $\angle A=\alpha$, $\angle BEA=\beta$ и $AE=m-n$.

*Вар.* 8. **1.** 30°. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

2. $\dfrac{\alpha\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$. Необходимо рассмотреть треугольник $AKC$ и учесть, что $\angle AKC = \angle B = \alpha$.

## С—10

*Вар.* 1. 1. 14 см. 2. Тупоугольный.

*Вар.* 2. 1. $\sqrt{29}$ см. 2. Остроугольный.

*Вар.* 3. 1. 7. 2. 60°. *Вар.* 4. 1. $2\sqrt{7}$. 2. 120°.

*Вар.* 5. 1. $\dfrac{10\sqrt{183}}{61}$. 2. По теореме косинусов $225 = 169 + 196 - 2\cdot 13\cdot 14\cdot\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{5^2}{13^2}} = \dfrac{12}{13}$. Так как $15 = 2R\sin\alpha$, то $R = \dfrac{15\cdot 13}{2\cdot 12} = \dfrac{65}{8}$. Можно воспользоваться формулой $R = \dfrac{abc}{4S}$, а площадь треугольника найти по формуле Герона. О т в е т: $\dfrac{65}{8}$.

*Вар.* 6. 1. $\sqrt{21}$. 2. 15. Можно по теореме косинусов найти, например, косинус угла, лежащего против стороны, длина которой равна 25. $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, тогда $h = 39\sin\alpha = 39\cdot\dfrac{5}{13} = 15$. Проще же найти площадь по формуле Герона и формуле $h_a = \dfrac{2S}{a}$.

*Вар.* 7. 1. Соединим концы хорды $AB$ с центром окружности. Из треугольника $MOB$ имеем: $BM^2 = R^2 + OM^2 - 2R\cdot OM\cdot\cos\angle BOM$, а из треугольника $MOA$: $MA^2 = R^2 + OM^2 - 2R\cdot OM\cdot\cos\angle AOM$. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle AOM = 180° - \angle BOM$ и $\cos\angle AOM = -\cos\angle BOM$. Тогда, сложив полученные равенства, имеем: $MA^2 + MB^2 = 2R^2 + 2OM^2$, т. е. эта сумма не зависит от положения хорды $AB$.

2. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$, $\alpha = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Тогда

$$\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B = \cos C,$$
$$\text{но } \sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{ и } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A.$$

Отсюда $\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$.

*Вар.* 8. 1. Пусть $ME \perp AB$ и $MD \perp AC$, $ME = a$, $MD = b$. Так как в четырехугольнике $AEMD$ сумма противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность, диаметр которой равен $AM$. $\angle EMD = 180° - \alpha$. Из треугольника $EMD$ имеем

$$ED = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.$$

С другой стороны, $ED = 2R\sin\alpha = AM \cdot \sin\alpha$. Тогда $AM = \frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. Ответ: $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

**2.** Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

## С—11

*Вар.* 1. **1.** $a \approx 0{,}17$, $c \approx 0{,}31$, $\angle C \approx 78°$. **2.** $\approx 41°25'$.

*Вар.* 2. **1.** $a \approx 13{,}8$, $\angle C \approx 41°47'$, $\angle B \approx 88°13'$. **2.** $\approx 1{,}6$.

*Вар.* 3. **1.** $a \approx 9{,}2$, $\angle B \approx 30°21'$, $\angle C \approx 124°9'$. **2.** $\approx 61{,}5$.

*Вар.* 4. **1.** $\angle A \approx 64°44'$, $\angle B \approx 73°24'$, $\angle C \approx 41°52'$. **2.** $\approx 475{,}8$.

*Вар.* 5. **1.** $a \approx 11{,}3$, $b \approx 9{,}7$, $c \approx 11{,}6$, $\angle C = 66°$. **2.** $\approx 5{,}6$.

*Вар.* 6. **1.** $a \approx 2{,}32$, $b \approx 1{,}47$, $c \approx 1{,}33$, $\angle C = 32°$. **2.** $\approx 1{,}6$.

*Вар.* 7. **1.** $P_1 \approx 145{,}6$ или $P_2 \approx 74{,}2$. **2.** $\approx 93°9'$. Из треугольника $ABC$ находим угол $BAC$, а из треугольника $ACD$ — $\angle CAD$. В таком случае $\angle BAD$ известен. Тогда из треугольника $ABD$ можно найти $BD$, а затем и $\angle ABD$. После этого из треугольника $ABO$ легко найти и $\angle AOB$.

*Вар.* 8. **1.** $S_1 \approx 627{,}4$ или $S_2 \approx 119{,}9$. **2.** $\approx 11{,}8$. Из треугольника $ABC$ находим $AC$, а затем и $\angle ACB$. После этого находим $\angle ACD$ и тогда из треугольника $ACD$ находим $AD$.

## С—12

*Вар.* 1. **1.** 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1. **2.** $\approx 81°52'$.

*Вар.* 2. **1.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{2}$. **2.** $\approx 98°8'$.

*Вар.* 3. **1.** 1) 32; 2) $-9$; 3) 0. **2.** $\approx 120°58'$.

*Вар.* 4. **1.** 1) 128; 2) $-72$; 3) 0. **2.** $\approx 146°19'$.

*Вар.* 5. **1.** 1) 9; 2) $-24$; 3) $-12$. **2.** $\approx 36°52'$.

*Вар.* 6. **1.** 1) 75; 2) $-156$; 3) 75. **2.** $\approx 56°19'$.

*Вар.* 7. **1.** Обозначим $\angle CDA = \alpha$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 + 3\cdot CD\cos\alpha + {}$$
$$+ 5CD\cdot(-\cos\alpha) + 0 = CD\cos\alpha\cdot(3-5) = -2CD\cos\alpha.$$

Но $CD\cos\alpha = AD - BC = 2$. Ответ: $-4$. **2.** $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

*Вар.* 8. **1.** $-m^2$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. **2.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Необходимо найти угол между диагоналями $AC$ и $BD$ и площадь трапеции по формуле $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, где $\alpha$ — угол между диагоналями. Дальнейшее решение очевидно.

**С—13**

*Вар.* 1. **1.** $2\sqrt{10}$. *Вар.* 2. **1.** $2\sqrt{19}$.

*Вар.* 3. **1.** $\approx 19°6'$. **2.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. *Вар.* 4. **1.** $\approx 23°25'$. **2.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

*Вар.* 5. **1.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=$
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}))=$
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})=0.$

**2.** $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ и $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. Из условия следует, что $\overrightarrow{CD}^2>\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$. Тогда $\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2>\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2$, $2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>$ $>-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$. Следовательно, $\angle C$ — острый.

*Вар.* 6. **1.** Из условия задачи следует, что $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})^2$, $\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$, $2\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$, $\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2=0$. Отсюда $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})^2=0$ и, значит, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

**2.** $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CA}^2)$. Так как $BC>AC$, то $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}>0$ и угол между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$ острый. Следовательно, $\angle BDC$ — тупой.

*Вар.* 7. **1.** Предположим, что $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. Тогда $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2$. Составим разность $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2-\overrightarrow{MB}^2-$ $-\overrightarrow{MD}^2$. Имеем

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=$$
$$=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})\cdot\overrightarrow{DA}+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=$$
$$=\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}=0.$$

Отсюда обратными преобразованиями получим искомое равенство. При доказательстве было использовано то, что $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BA}$.

**2.** Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ ($AD$ и $BC$ — основания), $\angle BAD=90°$. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, так как по условию $AC\perp BD$, $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2-$ $-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $0+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2-0=0$.

Отсюда следует, что $BC\cdot AD=AB^2$ и $AB=\sqrt{BC\cdot AD}$. При решении учли, что $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$.

*Вар.* 8. **1.** Предположим, что $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot DC$. Тогда $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$). Составим разность: $\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$. Имеем

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$$
$$= \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$$
$$= \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} =$$
$$= \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$

Отсюда обратными преобразованиями мы получим искомое равенство.

**2.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$,

$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) = 0$,

$\frac{1}{8}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$,

$\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{5}{8}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

Пусть $BC = x$, тогда $\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{5}{8}x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$, $3x^2 - 5x - 8 = 0$. Отсюда $x = 2\frac{2}{3}$. Ответ: $BC = 2\frac{2}{3}$.

## С—14

*Вар.* 1. **1.** 162°. **2.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. *Вар.* 2. **1.** 10. **2.** $b\sqrt{3}$; $2b$.

*Вар.* 3. **1.** $n = 3$. *Вар.* 4. **1.** $n = 6$.

*Вар.* 5. **1.** 72 см². Необходимо доказать, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

**2.** $\sqrt{5} - 1$. Необходимо доказать, что треугольник $ODE$ равнобедренный, и рассмотреть подобие треугольников $AOE$ и $ADE$.

*Вар.* 6. **1.** 24 см². **2.** $\sqrt{5} + 1$. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

*Вар.* 7. **1.** Правильные треугольники, четырехугольники и шестиугольники. **2.** На рисунке 64 $CQ = PD = DN = AM = AK = BL = BF = CE$. По условию длина этих отрезков равна половине диагонали квадрата. Пусть сторона квадрата равна $a$. Тогда $CP = DQ = a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $PQ = a - 2 \cdot \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a\sqrt{2} - a$. Очевидно, что $MN = KL = EF = PQ$. Из $\triangle FCP$ следует, что $FP = a\sqrt{2} - a$.

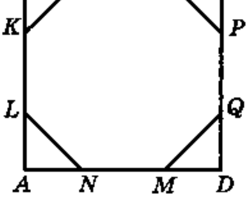

Рис. 64

Тогда можно утверждать, что стороны многоугольника $FPQMNLKE$ равны между собой. Кроме того, углы этого многоугольника равны 135°. Следовательно, данный восьмиугольник правильный.

*Вар.* 8. **1.** Да, стороны должны быть равными.

**2.** На рисунке 65 пары параллельных прямых $a$ и $a_1$, $b$ и $b_1$ пересекают прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ так, что образовался правильный шестиугольник $ABCDEF$, причем $F$ и $C$ — середины сторон $A_1B_1$ и $C_1D_1$. Пусть сторона шестиугольника равна $x$. В прямоугольном треугольнике $AB_1F$ $\angle B_1AF = 60°$. Тогда $B_1A = \frac{x}{2}$ и $B_1F = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что $B_1C_1 = 2x$ и $A_1B_1 = x\sqrt{3}$. Следовательно, стороны прямоугольника относятся между собой как $\sqrt{3} : 2$.

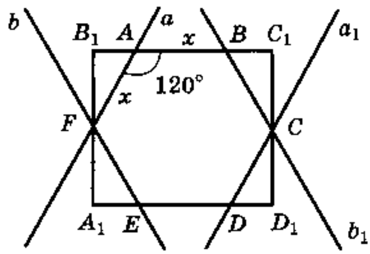


Рис. 65

## С—15

*Вар.* 1. **1.** 18 см, $9\sqrt{3}$ см$^2$. **2.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

*Вар.* 2. **1.** 24 см, $24\sqrt{3}$ см$^2$. **2.** $\frac{m}{\sqrt{3}}$.

*Вар.* 3. **1.** $\frac{\sqrt{6Q}}{2}$, $\frac{3Q\sqrt{3}}{8}$. **2.** $\frac{3}{4}$.

*Вар.* 4. **1.** $\frac{2}{3}\sqrt{Q\sqrt{3}}$, $\frac{4}{9}Q\sqrt{3}$. **2.** $\frac{1}{4}$.

*Вар.* 5. **1.** $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $3R^2$. **2.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

*Вар.* 6. **1.** $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $2R^2\sqrt{2}$. **2.** $\frac{a}{6}(3-\sqrt{3})$.

*Вар.* 7. **1.** Площадь четырехугольника $A_1A_6A_7A_8$ равна $\frac{1}{2}A_1A \cdot A_6A_8$, $A_1A_7 = 2R$, $A_6A_8 = R$, $S = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot R = R^2$. Но легко доказать, что $R = a$. Значит, $S = a^2$.

**2.** Опишем вокруг трапеции окружность. Углы при большем основании равны 75°. Так как диагонали взаимно перпендикулярны, то $\angle CAD = \angle BDA = 45°$. Тогда $\angle BAC = 30°$ и $\smile BC = 60°$. В таком случае радиус окружности равен $a$. С другой стороны, угол между диагоналями равен полусумме дуг $BC$ и $AD$. Поэтому $\smile AD = 120°$ и $AD = a\sqrt{3}$. Дальнейшее решение очевидно. Ответ: $\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$.

*Вар.* 8. **1.** $a^2\sqrt{2}$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

**2.** Трапеция $ABCD$, где $AD$ и $BC$ — основания, вписана в окружность радиуса $R$, $\smile AB = \smile CD = 60°$, $\smile BC = 90°$ и $\smile AD = 150°$;

$\smile AC = \smile AB + \smile BC = 150°$. В таком случае $AD = AC$. $\angle CAD = 30°$ и $CD = R$, так как $\smile CD = 60°$. Пусть $AC = AD = x$. По теореме косинусов имеем $R^2 = 2x^2 - 2x^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x^2 = R^2(2+\sqrt{3})$. Угол между диагоналями $AC$ и $BD$ равен 120°. Тогда $S_{ABCD} = = \frac{1}{2}x^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, т. е. $S_{ABCD} = \frac{R^2}{4}(3+2\sqrt{3})$.

## С—16

*Вар.* 1. **1.** $16\sqrt{2}$ см. **2.** $\approx 40{,}3$ дм.

*Вар.* 2. **1.** $18\sqrt{3}$ см. **2.** $\approx 6{,}23$ см.

*Вар.* 3. **1.** $\frac{\pi R}{6}(4+3\sqrt{3})$. **2.** 32 см.

*Вар.* 4. **1.** $\frac{\pi R}{2}(\sqrt{2}+1)$. **2.** 2 см.

*Вар.* 5. **2.** $\frac{3l}{4}$. *Вар.* 6. **2.** $l$.

*Вар.* 7. **1.** $\frac{c(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$. **2.** $12(\sqrt{3}+\pi)$ дм. Необходимо доказать, что $\angle AO_1D = \angle BO_2C = 120°$.

*Вар.* 8. **1.** $c(\sqrt{2}-1)$. **2.** $\frac{100}{3}(2\pi+3\sqrt{3})$ см. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

## С—17

*Вар.* 1. **1.** 2. **2.** $\approx 161{,}9$ см$^2$. *Вар.* 2. **1.** 3. **2.** $\approx 197°18'$.

*Вар.* 3. **1.** $6 - \pi$ см$^2$. **2.** $\frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

*Вар.* 4. **1.** $\frac{108-16\pi}{9}$. **2.** $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

*Вар.* 5. **1.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2.** $\frac{2}{3}Q$. Необходимо доказать, что площадь фигуры равна площади сектора с дугой $BC$.

*Вар.* 6. **1.** 4. **2.** $2Q$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

*Вар.* 7. **1.** $\frac{r^2}{6}(24\sqrt{3} - 11\pi)$. Необходимо доказать, что $\angle AO_1C = = 120°$, а $\angle BO_2C = 60°$. Площадь искомой фигуры равна площади трапеции $ABO_2O_1$ без площадей двух секторов $AO_1C$ и $BO_2C$. **2.** $\frac{a^2c^2}{4\pi b^2}$. Треугольники $ADC$ и $CBD$ подобны, и радиусы вписанных окружностей относятся между собой как $b : a$. **3.** Необходимо построить окружности с радиусами, равными $\frac{R}{\sqrt{3}}$ и $\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

*Вар*. 8. 1. $\frac{R^2}{54}(5\pi - 6\sqrt{3})$. Необходимо доказать, что радиус вписанной окружности $r = \frac{R}{3}$ и затем найти площадь фигуры, состоящей из четырехугольника $OCO_1D$ и сектора $CEDO_1$, дуга которого равна 240°. Дальнейшее решение очевидно. 2. $\frac{n^2c^2}{4\pi m^2}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7. 3. Необходимо построить прямоугольный треугольник с катетами $R_1$ и $R_2$, а затем на гипотенузе построенного треугольника, как на катете, построить еще один прямоугольный треугольник с катетом $R_3$. Гипотенуза последнего треугольника и будет являться радиусом искомого круга.

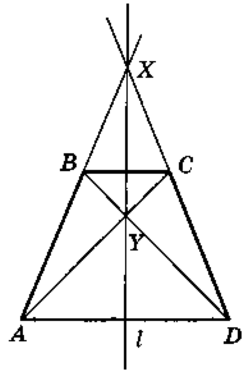


Рис. 66

## С—18

*Вар*. 5. 1. Решение показано на рисунке 66. 2. 2 см или 10 см.

*Вар*. 6. 1. Решение показано на рисунке 67. 2. $\frac{2}{3}$ или $\frac{3}{2}$.

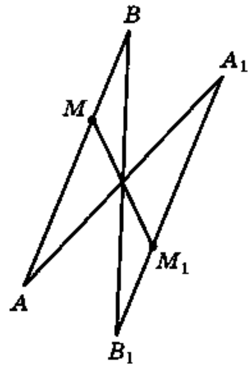


Рис. 67

*Вар*. 7. 1. Необходимо построить окружность, симметричную относительно прямой $l$, например с центром $O$. Дальнейшее решение смотри на рисунке 68. При данном расположении окружностей и прямой имеются две пары симметричных точек $X$ и $X_1$, $Y$ и $Y_1$.

*Вар*. 8. 1. Необходимо построить прямую $b_1$, симметричную прямой $b$ относительно центра $O$. Дальнейшее решение смотри на рисунке 69. При данном расположении прямых $a$ и $b$ и центра $O$ имеется одна пара центрально-симметричных точек $X$ и $X_1$.

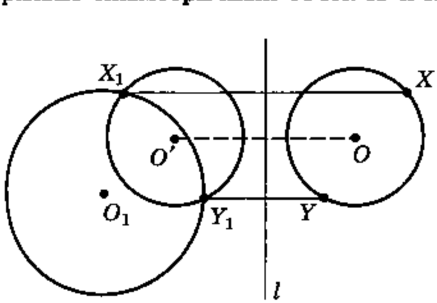


Рис. 68

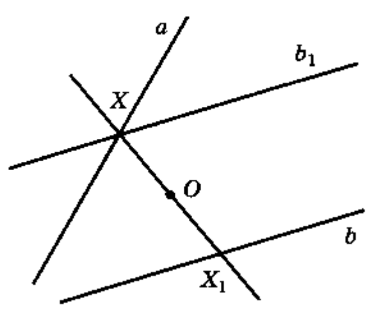


Рис. 69

*Вар.* 3. **2.** 15 см. *Вар.* 4. **2.** 8 см.

*Вар.* 5. **1.** Пусть $A \to A_1$ и $D \to D_1$. Так как при движении сохраняются расстояния, то следует провести окружности с центрами в точках $A_1$ и $D_1$ и радиусами, равными $AX$ и $DX$. Точка пересечения этих окружностей, располагающаяся ниже прямой $A_1D_1$, и будет искомой точкой $X_1$.

**2.** Предположим, что трапеция $ABCD$ построена. Осуществим параллельный перенос диагонали $BD$ на вектор $\overrightarrow{BC}$. Пусть $BD \to CD_1$. Треугольник $ACD_1$ прямоугольный ($\angle ACD_1 = 90°$) с известными катетами $AC$ и $CD_1$. Отсюда вытекает построение: строим прямоугольный треугольник $ACD_1$ по двум катетам, равным данным отрезкам. Затем через точку $A$ строим прямую, перпендикулярную $AD_1$, и через точку $C$ — прямую, параллельную $AD_1$. Точка их пересечения и есть вершина $B$. После этого отрезок $CD_1$ параллельно переносим на вектор $\overrightarrow{CB}$, при этом $D_1 \to D$. Трапеция $ABCD$ — искомая.

*Вар.* 6. Задача решается аналогично задаче из варианта 5.

*Вар.* 7. **1.** Опустим перпендикуляры $O_1F$ и $O_2F$ (рис. 70) на прямую $m$. Осуществим параллельный перенос окружности с центром $O_2$ на вектор $\overrightarrow{EF}$. Полученная окружность пересекает окружность с центром в точке $O_1$ в точках $A$ и $B$. Через эти точки проведем прямую $l$. Эта прямая пересекает окружность с центром в точке $O_2$ в точках $A_1$ и $B_1$. Легко доказать, что $AB = A_1B_1$.

**2.** Пусть $AE$ и $CF$ — медианы треугольника $ABC$, причем $AE = CF$. Осуществим параллельный перенос медианы $CF$ на вектор $\overrightarrow{FE}$, при этом $FC \to EC_1$. Мы получим равнобедренный треугольник $AEC_1$. Отсюда следует, что $\angle EAC_1 = \angle EC_1A$. Так как

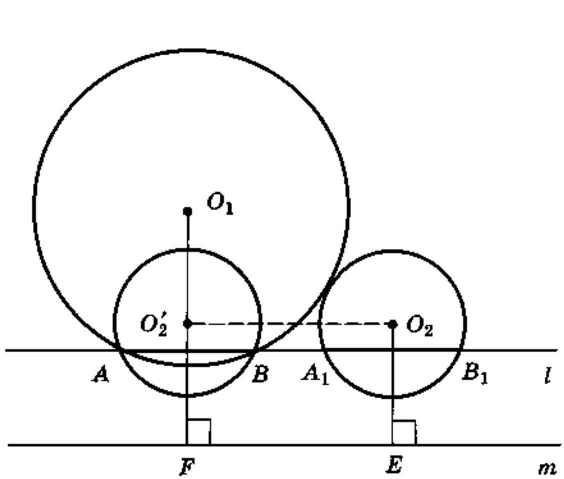

Рис. 70

$\angle FCA = \angle EC_1A$, то $\angle EAC = \angle FCA$. Дальнейшее доказательство очевидно.

*Вар.* 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

**2.** Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. $P$ — середина $BC$, а $K$ — середина $AD$. Осуществим параллельный перенос $AB$ на вектор $\overrightarrow{BP}$, а $CD$ — на вектор $\overrightarrow{KP}$. Тогда $BA \to PA_1$, а $CD \to PD_1$, треугольник $A_1PD_1$ прямоугольный ($\angle A_1PD_1 = 90°$) и $PK$ — медиана этого треугольника (докажите!), $PK = \frac{1}{2}A_1D_1$. Дальнейшее доказательство очевидно.

**С—20**

*Вар.* 1. **1.** $AB = A_1B_1$. *Вар.* 2. **1.** $\smile AB = \smile A_1B_1$.

*Вар.* 5. **1.** Следует осуществить поворот окружности с центром в точке $O_1$ относительно центра $O$ на 60° против часовой стрелки.

**2.** Пусть прямая $l$ пересекает стороны $AB$ и $AC$ соответственно в точках $E$ и $F$, а прямая $m$ — стороны $BC$ и $AC$ в точках $P$ и $K$. При повороте вокруг центра $O$ на 120° $AB \to AC$, $AC \to BC$ и $l \to m$. Очевидно, что $E \to K$ и $F \to P$. Тогда $EF \to KP$ и $EF = KP$.

*Вар.* 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

*Вар.* 7. **1.** Необходимо осуществить поворот прямой $a$ относительно центра $P$ на 60°. Построение показано на рисунке 71.

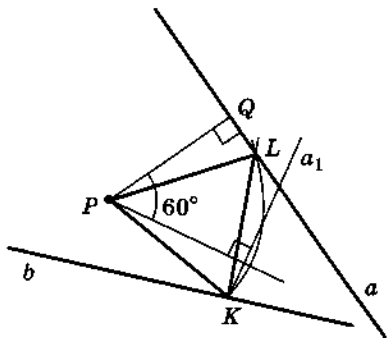

Рис. 71

**2.** При повороте на 90° относительно центра $A$ $P \to B$ и $C \to M$. Следовательно, $PC \to BM$, $PC = BM$ и $PC \perp PM$.

*Вар.* 8. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 7.

## Работы на повторение

**П—1**

*Вар.* 1. 1. 3) $4\frac{8}{13}$; 4) $9\frac{3}{13}$; 5) $\frac{S_{ADE}}{S_{DCF}} = \frac{7}{13}$.

*Вар.* 2. 1. 3) $5\frac{5}{17}$; 4) 4,8; 5) $\frac{3600}{289}$.

*Вар.* 3. 1. 3) $4\frac{2}{17}$, $26\frac{8}{17}$, 30; 4) 3, 15; 5) $\frac{S_{AKC}}{S_{CKB}} = \frac{64}{225}$.

*Вар.* 4. 1. 2) 14; 3) 24; 5) $36\sqrt{3}$.

*Вар.* 5. 1. 3) 1,6; 4) $6\sqrt{3}$; 5) $\frac{7\sqrt{3}}{15}$.

*Вар.* 6. 1. 3) 4, $\approx 2{,}2$, $\approx 4{,}8$; 4) $\frac{P_{AFC}}{P_{ABC}} \approx 0{,}8$; 5) $\approx 5{,}9$.

## П—2

*Вар.* 1. 2) 20; 3) $\sqrt{41}$; 4) $\approx 28°13'$. Воспользоваться тем, что $S_{APCK} = \frac{1}{2} AC \cdot PK \cdot \sin \angle AOK$.

*Вар.* 2. 1) 50; 2) 8; 4) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

*Вар.* 3. 2) $\frac{12}{5}$; 3) $36°52'$; 4) 32. Необходимо найти $\cos \angle ODF = \frac{4}{5}$.

*Вар.* 4. 1) 20, 200; 3) $10\sqrt{2}$. Необходимо учесть, что если $BP$ — высота трапеции, то длина отрезка $PD$ равна ее средней линии. $S_{ABCD} = PB^2$, так как из условия следует, что треугольник $BPD$ равнобедренный; 4) $8\sqrt{2}, 12\sqrt{2}$. Необходимо доказать, что $TQ = \frac{AD - BC}{2}$.

*Вар.* 5. 2) 9,6; 3) $\approx 73°44'$; 4) $\approx 44{,}2$. Для нахождения площади прямоугольника можно найти $\sin \angle MOF = \sin \angle BAD = 0{,}96$.

*Вар.* 6. 1) 2; 2) $4\pi$; 3) $\sqrt{41}, \sqrt{137}$; 4) $\approx 58°39'$.

## П—3

*Вар.* 1. 1) $10\sqrt{2}$; 3) $\approx 28°58'$, $\approx 241°02'$.

*Вар.* 2. 1) 7; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\approx 78°28'$; 4) $\approx 13{,}7$.

*Вар.* 3. 2) 6; 3) $3\sqrt{5}$; 4) $\approx 19°28'$.

*Вар.* 4. 2) 4; 3) $\frac{10}{\sqrt{3}}$; 4) $\approx 92°23'$.

*Вар.* 5. 1) 4 : 5 : 3; 2) 4; 3) $8\sqrt{3}$; 4) $4(\sqrt{3}+1)$.

*Вар.* 6. 1) $2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}$; 2) $120°, \frac{4\pi}{3}$; 3) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}$.

## П—4

*Вар.* 1. 1) $D(-2; -1)$; 2) $\overrightarrow{EB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; 3) $\approx 81°2'$; 4) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$; $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$.

*Вар.* 2. 1) Треугольник прямоугольный; 2) $\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; 3) $\approx 35°45'$; 4) $y = -\frac{5}{11}x + \frac{80}{11}$; $(x-1)^2 + (y-9)^2 = 50$.

*Вар.* 3. 1) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; 2) $H\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 3) $\overrightarrow{AH} = \frac{5}{3}\vec{i} + 2\vec{j}$; 4) $\approx 88°6'$, $\approx 15$.

*Вар.* 4. 1) $\approx 18{,}6$; 2) 4, $(x-4)^2 + y^2 = 16$; 3) $\approx 55°18'$; 4) $\overrightarrow{OB} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$.

*Вар.* 5. 2) 200; 3) $\approx 43°36'$, $\approx 136°24'$; 4) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \frac{200}{29}$.

*Вар.* 6. 1) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$; 2) $K\left(\frac{1}{3}; 2\right)$; 3) $\vec{a}\left\{-\frac{15}{\sqrt{61}}; \frac{18}{\sqrt{61}}\right\}$; 4) $\approx 129°48'$.

## Контрольные работы

**К—1**

*Вар.* 1. 1. 1) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$; 3) $x = 1$. 2. 2) 3.
3. Одну общую точку.
4*. $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{-3; -1\}$, а вектор $\vec{c}\{6; 2\}$. Тогда $\vec{c} = -2\vec{a} - 2\vec{b}$.

*Вар.* 2. 1. 1) $A(-3; 7)$; 2) $(-2; 5{,}5)$; 3) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.
2. $a = 6$ или $a = -4$.
3. $(x-11)^2 + y^2 = 36$.
4*. Так как $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = k\vec{b}$, где $k > 0$.
Пусть $a\{x; y\}$. Тогда $x = -k$, $y = 2k$, $\sqrt{k^2 + 4k^2} = \sqrt{9+16}$. Так как $k > 0$, то $k = \sqrt{5}$. Ответ: $\vec{a}\{-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}\}$.

*Вар.* 3. 1. 1) $\overrightarrow{EM} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$, 3) $y = -3$. 2. 1) $(3; -1)$.
3. Две общие точки.
4*. $\vec{l} = 2\vec{m} - 2\vec{n}$.

*Вар.* 4. 1. 1) $F(4; -5)$; 2) $(1; -2)$; 3) $y = -x - 1$.
2. $m = 7$ или $m = 1$.
3. $x^2 + (y+6)^2 = 16$.
4. $\vec{m}\left\{\frac{2\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right\}$.

**К—2**

*Вар.* 1. 1. $AB \approx 25{,}5$, $AC \approx 24$, $\angle B = 65°$, $R \approx 13{,}2$.
2. $HF \approx 6{,}3$, $S \approx 7{,}4$. 3*. $S = \frac{a^2 \sin^2 3\alpha \cdot \sin\alpha}{2\sin^2\alpha}$.

*Вар*. 2. **1.** $AC \approx 7{,}4$; $\angle A \approx 39°25'$, $\angle C \approx 30°35'$.

**2.** $S \approx 75{,}4$, $R = 5$. **3*.** $PK = \sqrt{\dfrac{2S\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}}$.

*Вар*. 3. **1.** $BC \approx 5{,}5$, $AB \approx 12{,}2$, $\angle B = 110°$, $R = 8$.

**2.** $\angle CBD \approx 41°25'$; $S \approx 19{,}8$. **3*.** $S = \dfrac{a^2\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\sin 2\alpha}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

*Вар*. 4. **1.** $PM \approx 3{,}7$; $\angle M = 20°20'$; $\angle P \approx 119°40'$.

**2.** $S \approx 26{,}3$; $R \approx 15{,}1$. **3*.** $R = \sqrt{\dfrac{S}{2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}$.

## К—3

*Вар*. 1. 1. 1) $-8$; 2) $-24$; 3) 24. 2. 1) $\approx 5°54'$; 2) $-90$.

3*. $\vec{a}\,\{3;\ 1\}$.

*Вар*. 2. **1.** 1) 9; 2) $-27$; 3) $-27$. 2. 1) 45°; 2) $-40$.

3*. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BC}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{CA}\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}+$

$+\overrightarrow{AB}\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}}{2}=0.$

*Вар*. 3. 1. 1) 12; 2) $-4$; 3) 0. **2.** 1) $\approx 15°57'$; 2) $-36$.

3*. $\vec{m}\,\{-2;\ -4\}$.

*Вар*. 4. 1. 1) 54; 2) $-18$; 3) 0. **2.** $\approx 60°15'$; 2) 0.

3. $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=$

$=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=$

$=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{MD}=$

$=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}+0=\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MB}.$

## К—4

*Вар*. 1. 1. $\pi$; $6\sqrt{3}$. **2.** $\dfrac{5\pi}{2}$, $\dfrac{25\pi}{4}$.

**3.** $\dfrac{R^2}{2}(\pi+\sqrt{3})$. **Площадь фигуры складываем из площади прямоугольного треугольника** $BAC$ **с катетами** $R$ **и** $R\sqrt{3}$ **и площади полукруга.**

**4*.** Пусть длины перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на стороны многоугольника, равны $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$. Рассмотрим треугольники с вершиной в точке $M$ и с основаниями, которыми служат стороны многоугольника. Тогда площадь многоугольника равна $\dfrac{1}{2}a_n(l_1+l_2+\ldots+l_n)$, где $a_n$ — сторона многоугольника. С другой стороны, площадь многоугольника равна $\dfrac{na_n}{2}\cdot r_n$, где $r_n$ — радиус вписанной окружности. Тогда $l_1+l_2+\ldots+l_n=r_n\cdot n$.

*Вар.* 2. 1. $48\pi$, $48\sqrt{3}$. **2.** $2\pi$, $6\pi$. **3.** $\frac{R^2}{2}(\pi - 2)$. Площадь фигуры можно получить как разность площади полукруга и площади прямоугольного треугольника, катеты которого равны $R\sqrt{2}$.

*Вар.* 3. **1.** $8\pi$, 32. **2.** $\frac{8\pi\sqrt{3}}{2}$, $16\pi$. **3.** $\frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$.

**4*.** Рассмотрим четырехугольник, образованный двумя соседними сторонами правильного $2n$-угольника $AB$ и $BC$ и радиусами $OA$ и $OC$, где $O$ — центр многоугольника. В таком случае $AC$ — сторона правильного $n$-угольника. Так как $AC \perp OB$, то $S_{OABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OB = \frac{a_n R}{2}$. Наш $2n$-угольник состоит из $n$ таких четырехугольников. Поэтому $S_{2n} = \frac{na_n R}{2}$.

*Вар.* 4. **1.** $4\pi$; $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. **2.** 6, $6\pi$. **3.** $\frac{R^2}{2}(\pi + 2)$.

## К—5

*Вар.* 1. **1.** 2) 90°. **2.** Величины углов равны и стороны сонаправлены. **3.** Нужно доказать, что прямая, содержащая середины параллельных хорд, является осью симметрии окружности. **4*.** Центром поворота является точка пересечения серединных перпендикуляров $AC$ и $BD$.

*Вар.* 2. **1.** 2) 60°. **4*.** Строим треугольник $A_1B_1C_1$, равный данному треугольнику $ABC$, так, чтобы его основание $A_1C_1$ лежало на прямой $a$. Затем через вершину $B_1$ проводим прямую, параллельную $a$, до пересечения с прямой $b$ в точке $B_2$. После этого осуществляем перенос треугольника $A_1B_1C_1$ на вектор $\overrightarrow{B_1B_2}$.

*Вар.* 3. 1. 2) 90°. **2.** Величины углов должны быть равны, а стороны противоположно направлены. **4*.** Необходимо построить образ этой прямой при повороте на 60° вокруг данной точки $H$ по часовой стрелке (против часовой стрелки) и затем найти точки пересечения образа этой прямой с окружностью. Дальнейшее решение очевидно.

*Вар.* 4. **1.** 2) 60°. **4*.** Пусть $a$ пересекает $c$ в точке $X$, а $b$ пересекает $d$ в точке $Y$. Тогда $\overrightarrow{XY}$ — искомый вектор.

## К—6

*Вар.* 1. 1) 4 см, 5 см, 6 см²; 2) $\pi$ см²; 3) 3 : 4; 4) $0{,}64\overrightarrow{CA} + 0{,}36\overrightarrow{CB}$; 5) 9.

*Вар.* 2. 1) $3\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см, $36\sqrt{3}$ см²; 2) треугольник правильный, $4\pi\sqrt{3}$ см; 3) $2\sqrt{63}$; 4) $-\overrightarrow{CD} + 0{,}5\overrightarrow{CB}$; 5) 0.

*Вар.* 3. 1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см$^2$; 2) 9 : 25; 3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см; 4) $\frac{1}{5}\overrightarrow{BD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BA}$; 5) $\frac{4}{3}$.

*Вар.* 4. 1) 12 см$^2$, $\frac{24}{25}$; 2) 3,6 см; 3) $6{,}25\pi$ см; 4) $\overrightarrow{AC} + 0{,}72\overrightarrow{CB}$; 5) 0.

## Задачи повышенной сложности

**1.** Пусть окружность касается сторон $AB$, $AC$ и $BC$ соответственно в точках $D$, $E$ и $F$. Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то $AD = AE = 5$ и $BD = BF = 3$. Пусть $CE = CF = x$. Тогда $AB = 8$, $AC = 5 + x$ и $BC = 3 + x$. Применяя теорему косинусов, получаем:

$$(x+3)^2 = (x+5)^2 + 64 - 2\cdot 8\cdot (x+5)\cdot \frac{1}{2}.$$

Отсюда $x = 10$ и $BC = 13$. Ответ: 13.

**2.** Примем радиус меньшей окружности за $x$. Тогда из равнобедренного прямоугольного треугольника $O_1BC$ имеем $O_1C = x\sqrt{2}$ (рис. 72). Из треугольника $OAC$ следует, что $OC = \sqrt{2}$, с другой стороны, $OC = CO_1 + O_1K + KO$. Имеем:

$$x\sqrt{2} + x + 1 = \sqrt{2},\ x(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2} - 1;$$

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $3 - 2\sqrt{2}$.

**3.** $S_{ACE} = S_{OBE}$, так как у этих треугольников равные основания $OB$ и $AC$ и равные высоты (рис. 73). $S_{OBE} = S_{DBF}$ по той же причине ($OE = DF$). Из этих двух равенств вытекает, что $S_{ACE} = S_{DBF}$. Это и требовалось доказать.

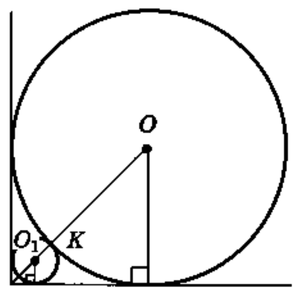


Рис. 72

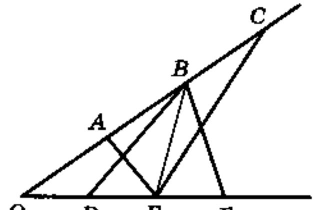


Рис. 73

4. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$ и пусть $\angle BAD = \alpha$ и $\angle BCD = \beta$. Диагональ $BD$ делит четырехугольник на два треугольника $ABD$ и $BCD$. $S_{ABD} = \frac{ad}{2}\sin\alpha$, $S_{BCD} = \frac{bc}{2}\sin\beta$. Так как длины сторон меньше 1 и $\sin\alpha \leqslant 1$ и $\sin\beta \leqslant 1$, то $S_{ABD} < \frac{1}{2}$ и $S_{BCD} < \frac{1}{2}$.

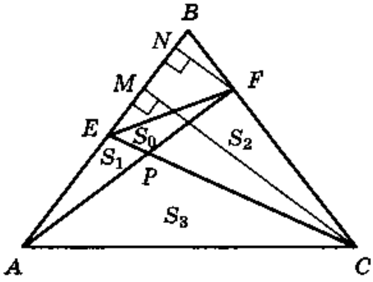

Рис. 74

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, что и требовалось доказать.

5. $S_{AEF} < S_{AEC}$, так как у этих треугольников одинаковое основание $AE$, но высота $FN$ треугольника $AEF$ меньше высоты $CM$ треугольника $AEC$ (рис. 74). $S_{AEF} = S_0 + S_1$, а $S_{AEC} = S_3 + S_1$. Тогда

$$S_0 + S_1 < S_3 + S_1 \text{ и } S_0 < S_3.$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{AP}{PF} \quad \text{и} \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{AP}{PF}.$$

Отсюда

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{S_3}{S_2}. \qquad (1)$$

Так как $S_0 < S_3$, то

$$\frac{S_3}{S_2} > \frac{S_0}{S_2}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем $\frac{S_1}{S_0} > \frac{S_0}{S_2}$, т. е. $S_0^2 < S_1S_2$ и $S_0 < \sqrt{S_1S_2}$, что и требовалось доказать.

6. Для любого треугольника справедлива теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ (1). С другой стороны, $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ и $c = 2R\sin C$, где $R$ — радиус описанной вокруг треугольника окружности. Тогда

$$\frac{a}{2R} = \sin A,\ \frac{b}{2R} = \sin B \text{ и } \frac{c}{2R} = \sin C.$$

Разделим левую и правую части равенства (1) на $4R^2$. Имеем

$$\frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - 2\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\cdot\cos A.$$

Отсюда

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A,$$

что и требовалось доказать.

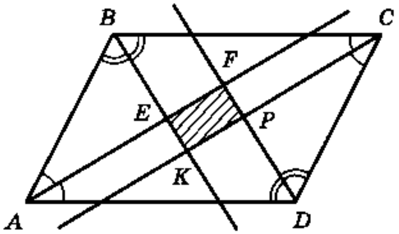

Рис. 75

**7.** Пусть $BC = a$, $AB = b$, $\angle BAD = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$ (рис. 75). Легко доказать, что четырехугольник $EFPK$ — прямоугольник. Из треугольника $BKC$ $BK = a\sin\frac{\alpha}{2}$ и из треугольника $ABE$ $BE = b\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда $EK = BK - BE = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично можно получить $EF = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2}$. Имеем

$$S_{EFPK} = (a-b)^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(a-b)^2\sin\alpha}{2}.$$

$$S_{ABCD} = ab\sin\alpha. \quad \frac{S_{EFPK}}{S_{ABCD}} = \frac{(a-b)^2}{2ab}.$$

По условию $a = 7$ и $b = 5$. Тогда это отношение равно $\frac{2}{35}$. Ответ: $\frac{2}{35}$.

**8.** Пусть угол при вершине треугольника равен $\alpha$. Тогда площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha.$$

Так как $S$ — целое число, то $\sin\alpha = 1$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. В первом случае $\alpha = 90°$ и основание равно $2\sqrt{2}$. Во втором случае $\alpha = 30°$ и $\alpha = 150°$. Тогда, используя теорему косинусов, можно найти третью сторону. Если $\alpha = 30°$, то основание равно $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$, если же $\alpha = 150°$, то $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$. Ответ: $2\sqrt{2}$, или $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$, или $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

**9.** Пусть $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Пусть сторона квадрата $x$. Из треугольника $ABM$ имеем:

$$49 = 9 + x^2 - 6x\cdot\cos\alpha, \qquad (1)$$

а из треугольника $CBM$:

$$25 = 9 + x^2 - 6x\cdot\cos\beta. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2)

$$\cos\alpha = \frac{x^2-40}{6x},\ \cos\beta = \frac{x^2-16}{6x}.$$

Так как $\alpha + \beta = 90°$ и $\cos\alpha = \sin\beta$, то

$$\frac{x^2-40}{6x} = \sqrt{1-\left(\frac{x^2-16}{6x}\right)^2}, \qquad \left(\frac{x^2-40}{6x}\right)^2 = 1-\left(\frac{x^2-16}{6x}\right)^2 \qquad (x \geqslant \sqrt{40}).$$

После несложных преобразований можно получить уравнение

$$x^4 - 74x^2 + 928 = 0.$$

Отсюда $x_1 = \sqrt{58}$ и $x_2 = 4$ (посторонний корень). Ответ: $\sqrt{58}$.

**10.** Пусть сторона $AB$ равна $x$ и пусть биссектриса $AK$ равна $y$.

$$S_{BAK} + S_{CAK} = S_{ABC}. \quad S_{BAK} = \frac{1}{2}xy\sin 30° = \frac{xy}{4}.$$

$$S_{CAK} = \frac{1}{2}(a-x)y\sin 30° = \frac{y(a-x)}{4}.$$

$$S_{ABC} = \frac{x(a-x)}{2}\sin 60° = \frac{x(a-x)\sqrt{3}}{4}.$$

Получим уравнение $\frac{xy}{4} + \frac{y(a-x)}{4} = \frac{x(a-x)\sqrt{3}}{4}$.

Отсюда $y = \frac{x(a-x)\sqrt{3}}{a}$. По теореме косинусов имеем $BC^2 = x^2 + (a-x)^2 - 2x(a-x)\cos 60° = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - ax + x^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$. По условию $\frac{x(a-x)\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$. Далее, $\frac{x(a-x)\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{3x(x-a) + a^2}$. Пусть $x(a-x) = t$. Тогда

$$\frac{t\sqrt{3}}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3t};\ 3t\sqrt{3} = 2a\sqrt{a^2 - 3t};$$

$$27t^2 = 4a^2(a^2 - 3t);\ 27t^2 + 12a^2t - 4a^4 = 0.$$

Отсюда $t = \frac{2a^2}{9}$, или $x(a-x) = \frac{2a^2}{9}$. $9x^2 - 9ax + 2a^2 = 0$, откуда $x_1 = \frac{a}{3}$, $x_2 = \frac{2a}{3}$. В таком случае $AB = \frac{a}{3}$, $AC = \frac{2a}{3}$ (или наоборот) и $BC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{a}{3}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е. прямоугольный треугольник с катетами $\frac{a}{3}$, $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и гипотенузой $\frac{2a}{3}$.

**11.** Рассмотрим четырехугольник $APHC$. Пусть $AH$ пересекает $CP$ в точке $O$. Так как $\angle APC = \angle AHC$, то вокруг четырехугольника можно описать окружность. Отсюда следует, что $\angle HPO = \angle OAC$. Кроме того, углы $POH$ и $AOC$ равны как вертикальные. Отсюда следует, что треугольник $AOC$ подобен треугольнику $POH$ и $\frac{AO}{OP} = \frac{AC}{PH} = 2$. В прямоугольном треугольнике $AOP$ $\angle PAO = 30°$, так как $\frac{OP}{OA} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle ABC = 90° - \angle BAH = 60°$. Ответ: 60°.

**12.** Пусть $AE = a_4$ — сторона квадрата, вписанного в окружность, а точки $B$, $C$ и $D$ делят дугу, которая стягивается хордой $AE$, на четыре равные части, т. е. хорды $AB = BC = CD = DE$ равны $a_{16}$ — стороне правильного вписанного в эту окружность 16-угольника.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

Тогда $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE})^2=\overrightarrow{AE}^2$; $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\overrightarrow{DE}^2+$ $+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}=$ $=\overrightarrow{AE}^2$. Легко доказать, что $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}}=22°30'$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}}=45°$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DE}}=$ $=67°30'$, $\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}}=22°30'$, $\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{DE}}=45°$ и $\widehat{\overrightarrow{CD}\,\overrightarrow{DE}}=22°30'$. В таком случае все скалярные произведения положительны и $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+$ $+\overrightarrow{DE}^2<\overrightarrow{AE}^2$. Тогда $4a_{16}^2<a_4^2$ и $16a_{16}^2<4a_4^2$, т. е. сумма квадратов сторон правильного вписанного 16-угольника меньше суммы квадратов сторон квадрата, вписанного в ту же окружность.

**13.** Пусть угол $COD$ между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен $\alpha$. Тогда

$$AD^2-AB^2\leqslant|\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2|=$$
$$=|(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})|=|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|=$$
$$=|AC\cdot BD\cos\alpha|=AC\cdot BD\,|\cos\alpha|<AC\cdot BD,$$

что и требовалось доказать.

**14.** Поместим треугольник $ABC$ в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 76. Пусть

$$AC=2a \text{ и } BD=h,\ DE\perp BC,\ E\ (x,\ y).$$

Если $DC=a$ и $BD=h$, то $EC:EB=a^2:h^2$. В таком случае $x=\dfrac{ah^2}{a^2+h^2}$ и $y=\dfrac{a^2h}{a^2+h^2}$. Имеем:

$$\overrightarrow{AE}\ \{x+ay\},\text{ или } \overrightarrow{AE}\ \left\{\frac{ah^2}{a^2+h^2}+a;\ \frac{a^2h}{a^2+h^2}\right\};$$

$$\overrightarrow{BM}\ \left\{\frac{x}{2};\ \frac{y}{2}-h\right\},\text{ или } \overrightarrow{BM}\ \left\{\frac{ah^2}{2(a^2+h^2)};\ \frac{a^2h}{2(a^2+h^2)}-h\right\}.$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{a(2h^2+a^2)}{a^2+h^2}\cdot\frac{ah^2}{2(a^2+h^2)}-\frac{a^2h}{a^2+h^2}\cdot\frac{h(a^2+2h^2)}{2(a^2+h^2)}=0.$$

Следовательно, $AE\perp BM$, что и требовалось доказать.

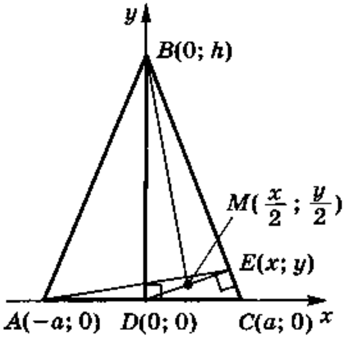


Рис. 76

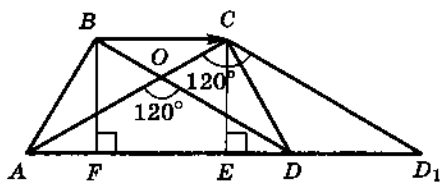


Рис. 77

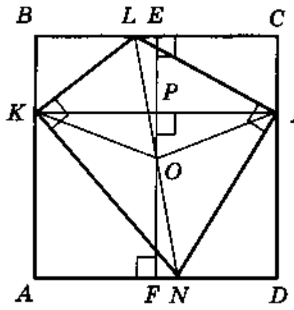


Рис. 78

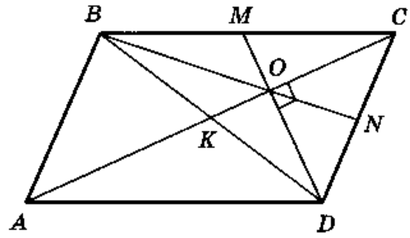


Рис. 79

**15.** Пусть для определенности длина диагонали $AC = 4$. Осуществим параллельный перенос диагонали $BD$ на вектор $\overrightarrow{BC}$, при этом $BD \to CD_1$ (рис. 77). В прямоугольном треугольнике $AEC$ $CE = 2$, а $AC = 4$. Тогда $\angle CAD = 30°$. Тогда и $BDA = 30°$, $\angle BDA = \angle CD_1A = 30°$ и треугольник $ACD_1$ равнобедренный. Значит, $CD_1 = 4$, $BD = CD_1 = 4$.

Ответ: 4.

**16.** В четырехугольнике $KLMN$ (рис. 78) углы $LKN$ и $LMN$ равны 90°. Тогда вокруг этого четырехугольника можно описать окружность с центром в точке $O$ — середине $LN$. Треугольник $KOM$ равнобедренный, и высота $OP$ делит $KM$ пополам. Продолжим $OP$ до пересечения со сторонами $BC$ и $AD$ соответственно в точках $E$ и $F$. Так как по условию $KM \parallel BC \parallel AD$, то очевидно, что $E$ и $F$ — середины сторон $BC$ и $AD$. Легко доказать, что треугольники $LOE$ и $KON$ равны. Из этого вытекает, что $OE = OF$, т. е. $O$ — центр квадрата, что и требовалось доказать.

**17.** Пусть $AC$ пересекает $DM$ в точке $O$, где $O$ — точка пересечения медиан треугольника $BCD$ (рис. 79). Тогда точка $O$ принадлежит медиане $BN$. Треугольник $COD$ по условию прямоугольный, а $ON$ — его медиана. В таком случае

$$ON = \frac{1}{2}CD, \qquad (1)$$

$$\frac{BN}{ON} = \frac{3}{1}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $BN : CD = 3 : 2$, что и требовалось доказать.

**18.** Легко доказать, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах сетки есть число вида

$$S = \frac{n}{2},\ n \in N. \qquad (*)$$

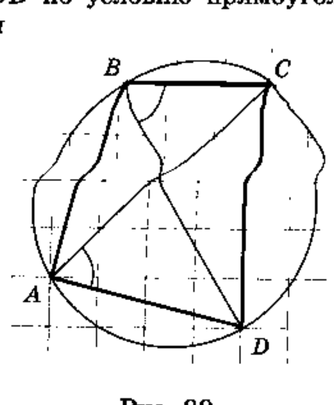


Рис. 80

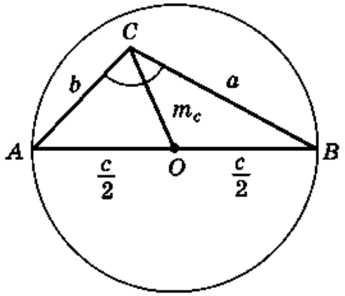


Рис. 81

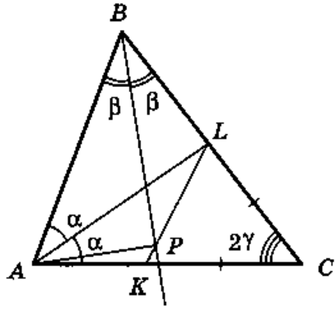


Рис. 82

На рисунке 80 показан пример четырехугольника, вершины которого находятся в узлах сетки.

$$S_{DAC} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin DAC,$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin DBC.$$

Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$. Учитывая равенство (*), можно утверждать, что $AC \cdot AD \cdot \sin \alpha = m_1$ — целое число и $BC \cdot BD \cdot \sin \alpha = m_2$ — целое число. Тогда $|AC \cdot AD \cdot \sin \alpha - BC \cdot BD \sin \alpha| = m$ — целое число ($m \neq 0$, так как $ABCD$ не трапеция). Отсюда $|AC \cdot AD - BC \cdot BD| = \frac{m}{\sin \alpha} \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

**19.** Пусть $\angle ACB$ треугольника $ABC$ тупой. Построим окружность с диаметром $AB$ (рис. 81). Тогда вершина $C$ будет находиться внутри круга с этим диаметром. Значит, $CO = m_c < \frac{c}{2} = \frac{c}{4} + \frac{c}{4}$. Так как $c < a + b$, то $m_c < \frac{c}{4} + \frac{a+b}{4} = \frac{P_{ABC}}{4}$, что и требовалось доказать.

**20.** Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ и $\angle BCA = 2\gamma$ (рис. 82). Так как $CK = CL$, то треугольник $LCK$ равнобедренный и $\angle KLC = 90° - \gamma$; $\angle ALC = 180° - \alpha - 2\gamma$; $\angle ALP = 180° - \alpha - 2\gamma - (90° - \gamma) = 90° - (\alpha + \gamma)$, но $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Поэтому $\alpha + \gamma = 90° - \beta$. Тогда $\angle ALC = \beta$. В четырехугольнике $ABCP$ $\angle ABP = \angle ALC = \beta$. Это значит, что вокруг четырехугольника $ABLP$ можно описать окружность. В таком случае, так как $\angle ABP = \angle PBL$, то $AP = PL$, что и требовалось доказать.

**21.** Пусть $A$, $B$, $C$ — данные точки. Если треугольник $ABC$ тупоугольный или прямоугольный, то круг с центром в середине большей стороны и радиусом, равным половине этой стороны, будет содержать все три точки $A$, $B$ и $C$. При этом радиус круга не больше $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Если же треугольник остроугольный и $R$ — ради-

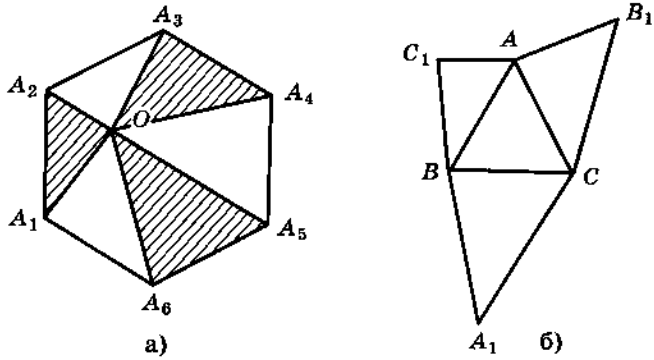


Рис. 83

ус его описанного круга, то одна из дуг $AB$, $BC$, $AC$ может быть больше $120°$, а соответствующая хорда не больше 1, тогда $R \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, все три точки $A$, $B$ и $C$ можно заключить в круг радиусом $\frac{1}{\sqrt{3}}$, что и требовалось доказать.

**22.** Очевидно, что

$$S_{A_1OA_2} + S_{A_3OA_4} + S_{A_5OA_6} \geqslant \frac{1}{2} S_6 \qquad (1)$$

или

$$S_{A_2OA_3} + S_{A_4OA_5} + S_{A_1OA_6} \geqslant \frac{1}{2} S_6 \qquad (2)$$

(рис. 83, *а*). Пусть для определенности выполняется неравенство (1). Рассмотрим правильный треугольник $ABC$ со стороной, равной стороне правильного шестиугольника (рис. 83, *б*). На сторонах этого треугольника строим треугольники $AC_1B$, $BA_1C$ и $AB_1C$, соответственно равные треугольникам $A_1OA_2$, $A_3OA_4$ и $A_5OA_6$. Тогда

$$S_{AB_1CA_1BC_1} \geqslant \frac{1}{2} S_6 + S_{ABC},$$

но $S_{ABC} = \frac{S_6}{6}$. В таком случае $S_{AB_1CA_1BC_1} \geqslant \frac{2}{3} S_6$, что и требовалось доказать.

**23.** Пусть $BK$ и $CM$ — касательные к окружности, проходящей через точки $A$, $D$ и $O$ (рис. 84). Треугольники $ABC$ и

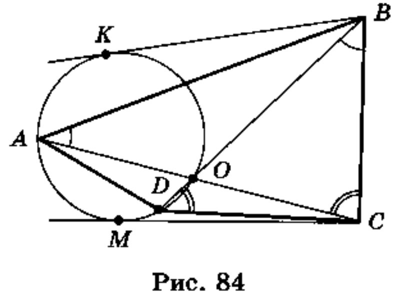


Рис. 84

$BCO$ подобны, так как $\angle BAC = \angle OBC$ и $\angle BCA$ общий. Отсюда $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CO}$, т. е.

$$AC \cdot CO = BC^2. \qquad (1)$$

По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки, получим

$$CM^2 = AC \cdot CO. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $BC = CM$. Из подобия треугольников $BDC$ и $BCO$ следует, что $\frac{BC}{BO} = \frac{BD}{BC}$, т. е. $BO \cdot BD = BC^2$. Кроме того, $BO \cdot BD = BK^2$. Тогда $BK = BC$. В таком случае $BK = CM$, что и требовалось доказать.

**24.** Построим вневписанную окружность треугольника $ACF$, которая касается стороны $AF$. Так как $CD$ — биссектриса угла $ACF$, а $AD$ — биссектриса угла $MAF$ (рис. 85), то $D$ — центр этой окружности. Следовательно, $FD$ — биссектриса угла $BFA$ и $\angle DFA = \frac{1}{2}\angle BFA$. Аналогично $\angle EFA = \frac{1}{2}\angle CFA$. Отсюда получаем, что $\angle EFD = \angle EFA + \angle DFA = \frac{1}{2}(\angle CFA + \angle BFA) = 90°$, что и требовалось доказать.

**25.** Из точек $A$ и $X$ опустим на $PO$ перпендикуляры $AA_1$ и $XX_1$ и докажем, что точки $A_1$ и $X_1$ совпадают (рис. 86). Пусть $\angle APO = \varphi$, $\angle PCO = \alpha$, $\angle CPO = \beta$. Из треугольника $PCO$ следует, что $\frac{PO}{\sin\alpha} = \frac{CO}{\sin\beta}$, но $CO = OA = PO \cdot \sin\varphi$ (из треугольника $AOP$). Тогда

$$\frac{PO}{\sin\alpha} = \frac{PO \cdot \sin\varphi}{\sin\beta}.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\varphi. \qquad (*)$$

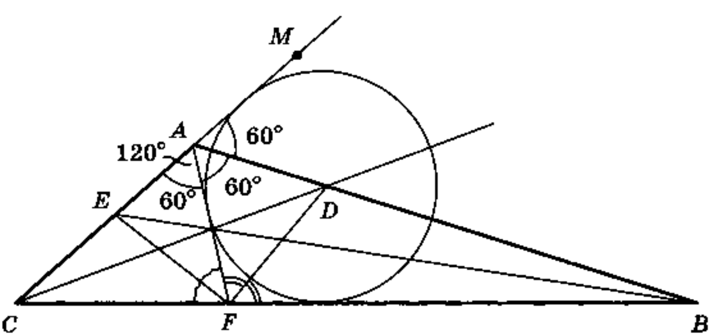


Рис. 85

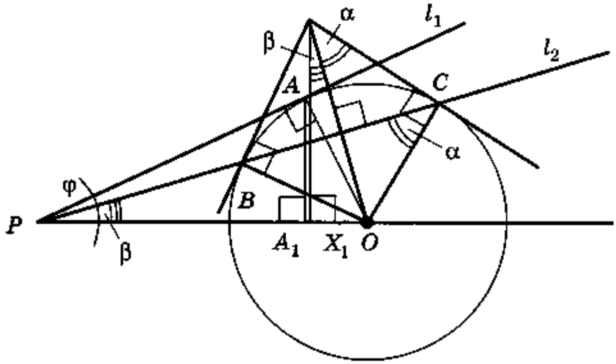


Рис. 86

$PA_1 = PA \cdot \cos\varphi$ (из треугольника $PA_1A$), но $PA = PO \cdot \cos\varphi$. В таком случае

$$PA_1 = PO \cdot \cos^2\varphi. \qquad (1)$$

$PX_1 = PO - OX_1$. Отметим, что $\angle X_1XO = \angle CPO = \beta$. В таком случае $PX_1 = PO - OX \cdot \sin\beta$ (из треугольника $XX_1O$). $\angle OXC = \angle PCO = \alpha$, $OX = \frac{CO}{\sin\alpha}$ (из треугольника $XCO$). Тогда $PX_1 = PO - \frac{CO}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta$. Используя результат (*), что $\sin\beta = \sin\alpha \cdot \sin\varphi$, получим $PX_1 = PO - \frac{CO}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi = PO - CO \cdot \sin\varphi$, но $CO = PO \cdot \sin\varphi$. Поэтому

$$PX_1 = PO - PO \cdot \sin^2\varphi = PO \cdot \cos^2\varphi. \qquad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), мы получим, что $PA_1 = PX_1$, т. е. точки $A_1$ и $X_1$ совпадают, а это значит, что $XA \perp OP$, что и требовалось доказать.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТ ПО ПУНКТАМ И ГЛАВАМ УЧЕБНИКА

| Работа | Тема | Пункт учебника |
|---|---|---|
| С—1 | Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам | 86 |
| С—2 | Координаты вектора | 87 |
| С—3 | Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Простейшие задачи в координатах | 88, 89 |
| С—4 | Применение метода координат к решению задач | 89 |
| С—5 | Уравнение окружности | 91 |
| С—6 | Уравнение прямой | 92 |
| С—7 | Использование уравнений окружности и прямой при решении задач | 91, 92 |
| С—8 | Площадь треугольника | 96 |
| С—9 | Теорема синусов | 97 |
| С—10 | Теорема косинусов | 98 |
| С—11 | Решение треугольников | 99 |
| С—12 | Скалярное произведение векторов, скалярное произведение векторов в координатах | 101—103 |
| С—13 | Свойства скалярного произведения векторов. Применение скалярного произведения векторов к решению задач | 104 |
| С—14 | Правильный многоугольник. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Окружность, вписанная в правильный многоугольник | 105—107 |
| С—15 | Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности. Построение правильных многоугольников | 108, 109 |
| С—16 | Длина окружности | 110 |
| С—17 | Площади круга и кругового сектора | 111, 112 |
| С—18 | Понятие движения. Осевая и центральная симметрии | 113, 114 |
| С—19 | Параллельный перенос | 116 |
| С—20 | Поворот | 117 |
| П—1 | Треугольники | |
| П—2 | Четырехугольники | |
| П—3 | Окружность | |
| П—4 | Координаты и векторы | |
| МД—1 | Координаты вектора | гл. X |
| МД—2 | Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов | гл. XI |
| МД—3 | Длина окружности и площадь круга | гл. XII |
| МД—4 | Движения | гл. XIII |
| МД—5 | Повторение курса 7—8 классов | |
| К—1 | Метод координат | 86—92 |
| К—2 | Соотношения между сторонами и углами треугольника | 96—99 |
| К—3 | Скалярное произведение векторов | 101—104 |
| К—4 | Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга | 105—108, 110—112 |
| К—5 | Движения | 113, 114, 116, 117 |
| К—6 | Итоговое повторение | |

## СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

**Зив Борис Германович**

**ГЕОМЕТРИЯ**
**ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ**
**9 класс**

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *С. В. Дубова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художники *В. В. Костин, О. В. Корытов, Е. В. Соганова, О. П. Богомолова*
Технический редактор *С. В. Щербакова*
Корректоры *Г. П. Быстрова, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 23.02.09. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,97. Тираж 30 000 экз. Заказ № 27904.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru